

Курсъ

Строительной механики

Читанный въ Институтѣ Гражданскихъ Инженеровъ
ИМПЕРАТОРА НИКОЛАЯ I

преподавателемъ, Гражданскимъ Инженеромъ
В. Н. Соколовскимъ.

Часть I.

Графическая статика.

Введеніе.

Предметъ строительной механики и ея раздѣленіе. При проектированіи сооружений необходимо принимать во вниманіе: во-первыхъ, чтобы сооруженіе удовлетворяло своему назначенію, и во-вторыхъ, чтобы оно могло сопротивляться дѣйствію внѣшнихъ силъ. Внѣшнія силы, дѣйствующія на сооруженіе, могутъ быть химическія и механическія. Защищая сооруженіе отъ вреднаго вліянія химическихъ силъ помощью извѣстныхъ предохранительныхъ средствъ, мы должны будемъ изучитъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, вліяніе механическихъ силъ и придать частямъ сооруженія такіе размѣры, чтобы послѣднее могло возможно дольше сопротивляться дѣйствію внѣшнихъ механическихъ силъ.

Изученіе вліянія механическихъ силъ и выполненіе указаннаго условія составляетъ предметъ строительной механики. Спротивляемость же сооруженія дѣйствію механическихъ силъ зависитъ отъ двухъ факторовъ: во-первыхъ, отъ самаго матеріала, изъ котораго возводится сооруженіе, а, во-вторыхъ, отъ конструкціи его частей. На основаніи этихъ двухъ условій сопротивляемости сооруженія, а именно: условія прочности и условія устойчивости его, строительная механика распадается на два отдѣла:

1) *Теорію сопротивленія матеріаловъ*, изслѣдующую зависимость между силами внѣшними и внутренними, которыя вызываются измѣненіемъ формы матеріальнаго тѣла.

2) *Статику сооружений*, рассматривающую условія устойчивости и прочности различнаго рода сооружений и излагающую способы опредѣленія целесообразныхъ конструкцій и размѣровъ сооружений въ зависимости отъ этихъ условій.

Для изслѣдованія вопросовъ строительной механики можно приложить два способа: аналитическій и графическій. Мы, въ свою очередь, будемъ прилагать тотъ изъ способовъ, который найдемъ болѣе удобнымъ для даннаго случая, пользуясь также графико-аналитическимъ методомъ. А потому, изученіе строительной механики намъ придется начать съ графической статики, куда нами отнесены также опредѣленія центра тяжести площадей и ихъ моменты перваго и втораго порядка. Послѣднее сдѣлано, во-первыхъ, въ виду того, что для ихъ опредѣленія мы будемъ пользоваться также графико-аналитическимъ методомъ, а во-вторыхъ, потому что, предварительное ознакомленіе со способами опредѣленія центровъ тяжести и моментовъ ихъ площадей необходимо для дальнѣйшихъ изслѣдованій въ теоріи сопротивленія матеріаловъ. Весь курсъ строительной механики выйдетъ въ трехъ частяхъ: первая часть—Графическая статика, вторая — Теорія сопротивленія матеріаловъ и ея приложенія и третья,—Статика сооружений.

Часть I.

Графическая статика

ГЛАВА I-ая

Сложение и разложение силъ, лежащихъ въ одной плоскости.

1. Общія понятія. Статикою называется часть механики, занимающаяся изученіемъ условій равновѣсія тѣлъ, подверженныхъ дѣйствию внѣшнихъ силъ, и, какъ намъ извѣстно изъ теоретической механики, это изученіе приводитъ къ отысканію равнодѣйствующей силы, пары силъ и условій, при которыхъ равнодѣйствующія уравновѣшиваются.

Графическая статика рѣшаетъ эти вопросы геометрическимъ путемъ.

Для всѣхъ послѣдующихъ разсужденій примемъ за исходные пункты тѣ же положенія, которыя приняты въ теоретической механикѣ.

I. Всѣ разсужденія относятся къ тѣламъ неизмѣняемымъ, т. е. абсолютно твердымъ.

II. Силы лежатъ въ одной плоскости.

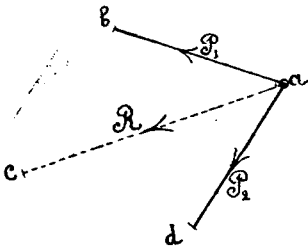
III. Въ силу неизмѣняемости тѣла, точка приложенія силы можетъ быть перенесена по направленію дѣйствія силы.

IV. Равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ равна, по величинѣ и направленію, діагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ.

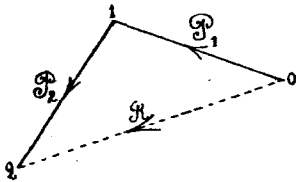
V. Дѣйствіе, произведенное системою силъ, не измѣнится отъ введенія новыхъ силъ, взаимно уравновѣшивающихся. Кромѣ этихъ теоретическихъ условій, намъ необходимо условиться въ графическомъ изображеніи силъ. Въ графической статикѣ принято изображать силу прямой линіей, занимающей извѣстное положеніе, обладающей определенной длиною и направленіемъ и характеризуемой стрѣлкой на чертѣ или послѣдовательностью значковъ на письмѣ. Изъ графическаго представленія величины силы становится яснымъ необходимость масштаба силъ.

2. Сложенеіе двухъ силъ, имѣющихъ одну точку приложенія. Положимъ, что прямыя ab и ad выражаютъ собою по величинѣ и направленію двѣ силы P_1 и P_2 , приложенныя къ одной точкѣ a . (Черт. 1а). Требуется найти ихъ равнодѣйствующую, т. е. сложить ихъ. По принятому нами положенію IV-му, равнодѣйствующая ихъ выразится, по величинѣ, направленію и положенію, діагональю параллелограмма ac . Ту-же равнодѣйствующую мы можемъ получить нѣсколько

инымъ путемъ, а именно: вмѣсто того, чтобы строить параллелограммъ, сложимъ геометрически наши силы. Для этого въ сторонѣ беремъ точку 0 (Черт. 1b), проводимъ черезъ нее прямую 01 параллельную первой силѣ P_1 и откладываемъ ее величину; изъ конца этой силы (1) проводимъ прямую параллельную второй силѣ и откладываемъ ее величину. Замыкающая сторона 02 треугольника выразитъ собою равнодѣйствующую по величинѣ и направленію, которое, на основаніи прежняго построения, встрѣчается съ направлениемъ силъ составляющихъ, если смотрѣть по периметру треугольника. Зная точку a приложенія силъ на чертежѣ 1a, остается перенести въ нее равнодѣйствующую.

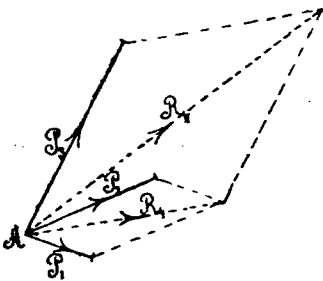


черт. 1a.



черт. 1b.

имѣемъ нѣсколько силъ: P_1, P_2, P_3, \dots , приложенныхъ къ точкѣ A (Черт. 2). Для сложения ихъ по правилу параллелограмма силъ — намъ пришлось бы найти равнодѣйствующую сначала двухъ силъ P_1 и P_2 ; затѣмъ построить равнодѣйствующую изъ найденной равнодѣйствующей R_1 и 3-ей силы P_3 и т. д. Въ концѣ концовъ, получили-бы силу R , дѣйствіе которой замѣнило-бы дѣйствіе силъ P_1, P_2, P_3 и т. д. Но мы воспользуемся предыдущимъ способомъ геометрическаго сложения силъ.

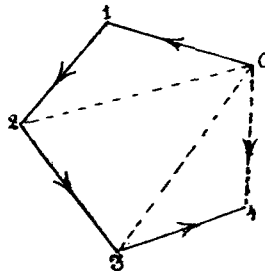


черт. 2.

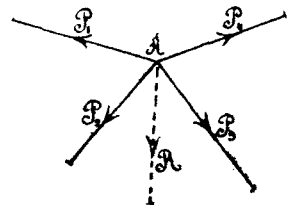
угольникъ, то прямая 04 выразитъ по величинѣ и направленію равнодѣйствующую всѣхъ силъ. Дѣйствительно, проведя изъ точки 0 прямая къ точкамъ 2, 3, 4, видимъ, что діагональ 02 выразитъ, на основаніи предыдущаго построения, равнодѣйствующую силъ P_1 и

3. Сложеніе нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Положимъ, по правилу параллелограмма силъ — намъ пришлось бы найти равнодѣйствующую сначала двухъ силъ P_1 и P_2 ; затѣмъ построить равнодѣйствующую изъ найденной равнодѣйствующей R_1 и 3-ей силы P_3 и т. д. Въ концѣ концовъ, получили-бы силу R , дѣйствіе которой замѣнило-бы дѣйствіе силъ P_1, P_2, P_3 и т. д. Но мы воспользуемся предыдущимъ способомъ геометрическаго сложения силъ.

Прикладывая одну силу къ другой по величинѣ и направленію, мы получимъ незамкнутый многоугольникъ 01234 (Черт. 3b). Если замкнемъ этотъ много-



черт. 3b.



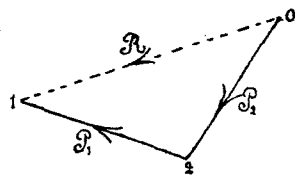
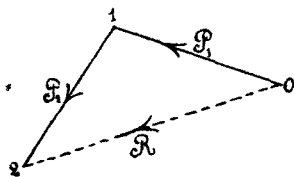
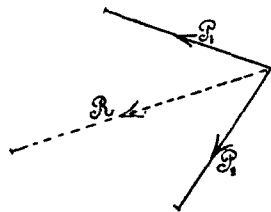
черт. 3a.

P_2 ; диагональ 03—равнодѣйствующую силу R_1 и P_3 , т. е. силу P_1, P_2, P_3 , и т. д., следовательно прямая 04 выразитъ равнодѣйствующую всѣхъ силъ. Основываясь на предыдущемъ, мы видимъ, что направление равнодѣйствующей будетъ встрѣчаться съ направлениемъ составляющихъ, если смотрѣть по периметру многоугольника. Положеніе равнодѣйствующей найдется, если перенесемъ силу, равную по величинѣ отрѣзку 04 и по направленію отъ 0 къ 4, параллельно самой себѣ въ общую точку приложенія силъ A . (Черт. 3а). Для полученія болѣе общаго способа сложения силъ, намъ остается рѣшить здѣсь еще одинъ вопросъ: имѣетъ ли значеніе порядокъ сложения силъ на величину и направленіе равнодѣйствующей? Для рѣшенія этого вопроса обратимся опять къ сложению двухъ силъ и посмотримъ, зависитъ ли равнодѣйствующая отъ порядка сложения двухъ силъ. Построимъ сперва треугольникъ силъ, прикладывая къ концу силы P_1 силу P_2 , а затѣмъ построимъ также треугольникъ, прикладывая къ концу силы P_2 силу P_1 ; сравнивая оба треугольника, видимъ, (Черт. 4), что въ обоихъ случаяхъ величина и направленіе равнодѣйствующей остались тѣ же. Следовательно, складывать сколько угодно силъ можно въ произвольномъ порядкѣ, такъ какъ это заключеніе, вѣрное для двухъ силъ, очевидно, будетъ вѣрнымъ и для какого угодно числа силъ, ибо вышензложенное доказательство можно примѣнить къ каждому изъ треугольниковъ 012, 023, 034 и т. д., составляющихъ многоугольникъ силъ. (Черт. 3а).

4. Сложеніе силъ, приложенныхъ въ разныхъ точкахъ Въ этомъ случаѣ недостаточно найти изъ многоугольника силъ величину и направленіе равнодѣйствующей, необходимо отыскать точку, черезъ которую проходитъ равнодѣйствующая. Мы могли бы это сдѣлать по правилу параллелограмма, продолжая силы до пересѣченія, но чертежъ получился бы очень запутаннымъ, да, кромѣ того, нѣкоторыя силы могли бы не пересѣчься на чертежѣ или пересѣкались бы подъ очень острымъ угломъ, что дѣлаетъ построеніе не точнымъ; поэтому мы обратимся къ другому приему, для чего предварительно намъ необходимо ознакомиться со способомъ разложенія силъ.

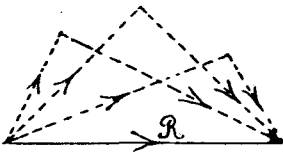
5. Разложеніе силы на двѣ составляющія.

Если нужно разложить силу на двѣ произвольныя составляющія, то задача будетъ неопредѣленная, т. к. одну и ту же равнодѣйствующую могутъ замѣнить всевозможныя составляющія, какъ это видно изъ чертежа 5, представляющаго нѣсколько треугольниковъ силъ, имѣющихъ общее основаніе—равнодѣйствующую R . Слѣдов., вопросъ о разложеніи силы R сводится къ построению треугольника, у котораго непремѣннымъ заданіемъ является одна сторона и поэтому,



черт. 4.

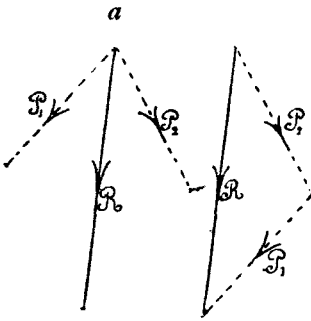
чтобы задача была определенная, необходимы еще двѣ данныя. Ограничимся двумя случаями: 1) по направленію составляющихъ опредѣлить величины ихъ, и 2) по величинѣ и направленію одной составляющей найти величину и направленіе другой. Не трудно видѣть, что, въ первомъ случаѣ, къ извѣстной сторонѣ треугольника (равнодѣствующей) прибавляются еще два извѣстныхъ угла при ней, а во второмъ, прибавляется сторона и уголъ между сторонами.



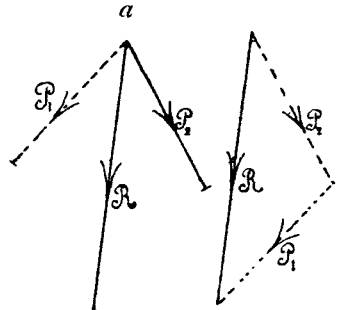
черт. 5.

Построивъ треугольнички, перенесемъ полученныя составляющія силы въ точки приложенія A (Черт. 6а и 6б).

Воспользуемся теперь указаннымъ способомъ разложенія силъ для нахождения точки, черезъ которую должна проходить равнодѣ-

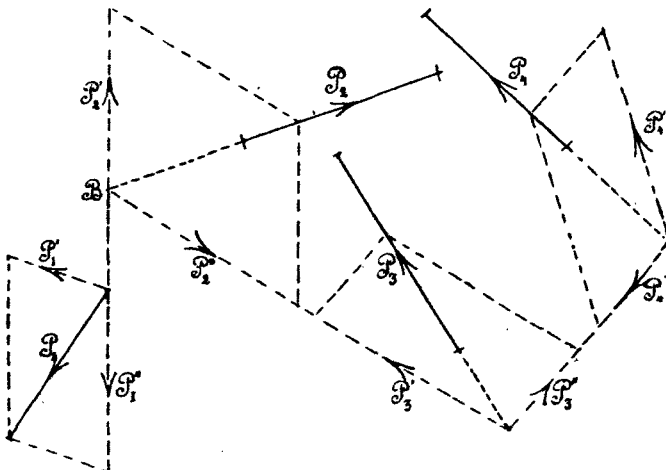


черт. 6а.



черт. 6б.

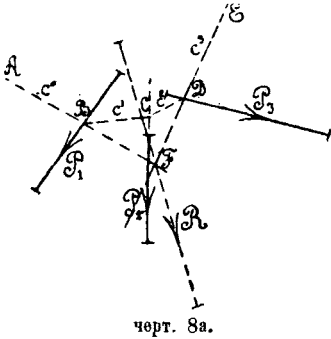
ствующая въ томъ случаѣ, когда силы имѣютъ нѣсколько точекъ приложенія.



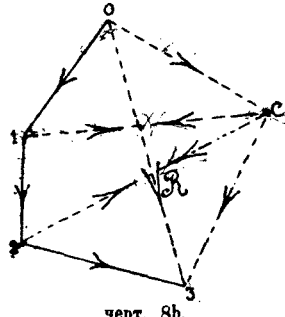
черт. 7.

6. Общій методъ сложения силъ. Мы уже знаемъ, что, если имѣемъ нѣсколько силъ P_1, P_2, P_3, \dots (черт. 7), приложенныхъ въ раз-

ныхъ точкахъ плоскости, то равнодѣйствующая ихъ выразится по величинѣ и направленію замыкающей стороной многоугольника силъ. Для отысканія же точки, черезъ которую пройдетъ равнодѣйствующая, разложимъ всѣ данныя силы на составляющія, соблюдая слѣдующее правило:



черт. 8a.



черт. 8b.

Задавшись величиной и направленіемъ одной изъ составляющихъ (P_1') первой силы (P_1) опредѣляемъ величину и направленіе другой составляющей (P_1'') той же силы (P_1); принимая полученную составляющую (P_1'') съ обратнымъ направленіемъ за одну изъ составляющихъ (P_2') второй силы P_2 , опредѣлимъ другую составляющую P_2'' и т. д. Въ данномъ случаѣ приходится для опредѣленія второй составляющей, силу P_2 и первую составляющую $P_2' = P_1''$ перенести въ точку B ихъ взаимнаго пересѣченія. Не трудно видѣть, что благодаря такому разложению силъ у насъ останутся только двѣ силы: первая составляющая первой силы P_1' и послѣдняя составляющая послѣдней силы P_4'' , дѣйствіе всѣхъ остальныхъ составляющихъ, равныхъ и взаимно противоположныхъ, взаимно уравниваются. Пересѣченіе оставшихся составляющихъ дастъ точку, черезъ которую пройдетъ ихъ равнодѣйствующая, а слѣдов. она же равнодѣйствующая всѣхъ данныхъ силъ.

Построеніе значительно упростится, если мы обратимся къ многоугольнику силъ.

Избравъ произвольную точку C (черт. 8b) и соединивъ ее съ вершинами многоугольника силъ $O123$, мы тѣмъ самымъ назначили величину и направленіе одной изъ составляющихъ OC первой силы и опредѣлили величины и направленія остальныхъ составляющихъ всѣхъ силъ. Мы видимъ, что дѣйствіе составляющихъ $C1$ и $1C$, $C2$ и $2C$, какъ равныхъ и прямо противоположныхъ, взаимно уничтожается, и останутся двѣ силы OC и $C3$.

Строя на черт. 8a ломанную линію $ABCDE$, для чего проводимъ стороны ея соотвѣтственно параллельными линіямъ OC , $C1$, $C2$ и $C3$ многоугольника силъ, и продолжая крайнія стороны до ихъ пересѣченія, получимъ точку F , черезъ которую пройдетъ равнодѣйствующая.

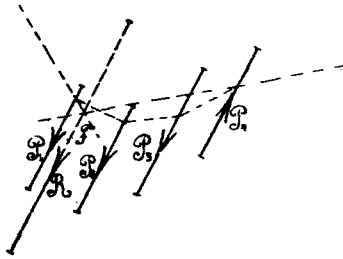
Указанный способъ отысканія равнодѣйствующей по величинѣ, направленію и положенію удобенъ тѣмъ, что даетъ возможность находить равнодѣйствующую и ея положеніе не только всѣхъ заданныхъ силъ, но и какого угодно числа ихъ. Для этого надо продолжить до ихъ пересѣченія начальную составляющую первой взятой силы и конечную составляющую послѣдней и черезъ найденную точку пере-

сѣченія провести линію параллельную соотвѣтствующей равнодѣйствующей многоугольника силъ.

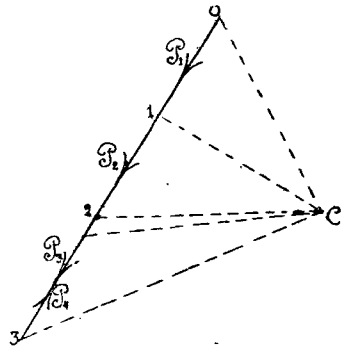
Разсматривая ломанную линію $ABCDE$, мы замѣтимъ, что она представляетъ какъ бы гибкую и нерастяжимую нить, закрѣпленную въ точкахъ A и E и у точекъ которой B , C и D , приложены силы P_1 , P_2 и P_3 . Въ силу этого сходства ее называютъ *веревочнымъ многоугольникомъ*.

Многоугольникъ 0123 называютъ *многоугольникомъ силъ* или *Вариньоновскимъ многоугольникомъ*, — прямыя CO , CO_1 *лучами* многоугольника силъ, а точку C — *полюсомъ*.

Итакъ, чтобы найти равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ, не пересѣкающихся на чертежѣ, строимъ многоугольникъ силъ, выбираемъ произвольный полюсъ, проводимъ лучи и строимъ веревочный многоугольникъ; продолжая первый и послѣдній лучи до ихъ взаимнаго пересѣченія, переносимъ, въ полученную точку равнодѣйствующую, взятую изъ многоугольника силъ по величинѣ и направленію.



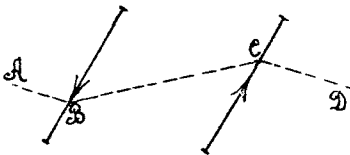
черт. 9а.



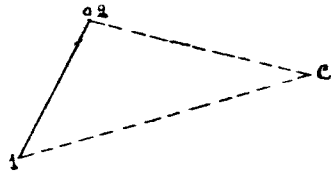
черт. 9б.

7. Сложеніе параллельныхъ силъ. При ихъ сложении многоугольникъ силъ обращается въ прямую линію, и равнодѣйствующая будетъ равна по величинѣ и направленію отрѣзку 04 (черт. 9б), точка ея приложения получится въ пересѣченіи крайнихъ лучей въ точкѣ F .

При сложении параллельныхъ силъ замѣчательнъ тотъ случай, когда двѣ силы равны и направлены въ разныя стороны.



черт. 10а.



черт. 10б.

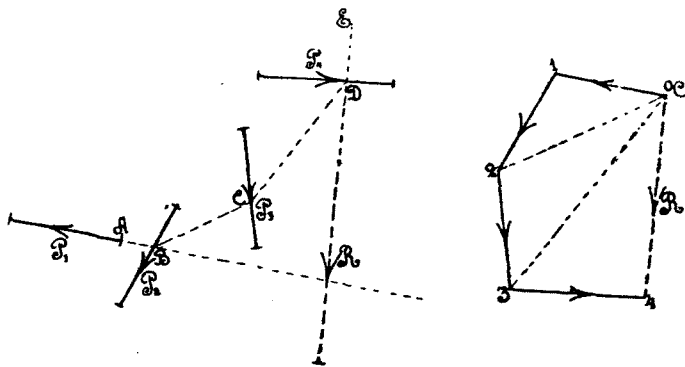
Построивъ многоугольникъ силъ (черт. 10б), увидимъ, что равнодѣйствующая 02 равна нулю. Однако, это не указываетъ еще на то, что не произойдетъ движенія, изъ этого можно лишь заключить, что не произойдетъ движенія производимаго одной силой, т. е. поступательнаго движенія. Двѣ параллельныя силы, направленные въ разныя

стороны, производят особый род движения, называемый вращательным. Ясно, что действие таких двух сил нельзя заменить действием одной силы; и далее, если бы мы стали искать точку пересечения крайних лучей веревочного многоугольника, т. е. точку, через которую проходит равнодействующая, то мы ее получили бы в бесконечности, т. к. крайние лучи параллельны (черт. 10а), и следовательно, пара сил складывается в одну силу, равную нулю и приложенную в бесконечности.

8. Особенный случай сложения сил. В заключение о сложении сил, нам остается сказать несколько слов относительно выбора полюса, т. е. относительно выбора величины и положения составляющих сил. Разберем здесь тот особый случай, когда полюс совпадает с началом 1-ой силы во многоугольнике сил.

Первый луч в данном случае обратится в 0, второй будет равен первой силе, третий, четвертый и т. д. представляют из себя равнодействующие данных сил.

Действительно, если нам надо определить равнодействующую сил $P_1, P_2, P_3,$ и P_4 (черт. 11), мы продолжили бы первый луч AB до встречи с последним лучом ED и через точку пересечения провели бы линию, равную и параллельную равнодействующей, но, как видно из чертежа, положение равнодействующей совпадает с положением последнего луча веревочного многоугольника. Таким образом, такой выбор полюса сразу дает нам на главном чертеже положение равнодействующей.



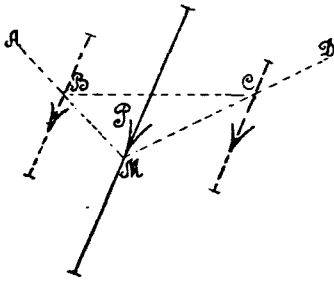
черт. 11.

Указанное упрощение имеет обширное применение в тех случаях, когда, при действии на сооружение произвольно направленных сил, требуется найти давление в любом сечении.

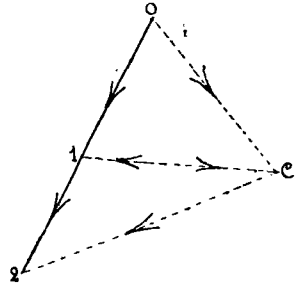
9. Разложение данной силы на две параллельные. Мы уже рассматривали ранее (№ 5) тот случай разложения силы на две составляющие, когда последние пересекались с равнодействующей; теперь же разберем тот случай, когда составляющие должны быть параллельны.

Применим к этому случаю тот же способ построения многоугольника сил и веревочного многоугольника.

Разложимъ сперва данную силу P на двѣ произвольно направленные, пересѣкающія ее (черт. 12b), для чего въ сторонѣ строимъ треугольники силъ, выбирая произвольно полюсъ C . Проведя лучи AM и MD (черт. 12a) соответственно параллельно OC и $C2$, мы, тѣмъ самымъ, опредѣлили направления составляющихъ, которыя пересѣкаютъ заданныя направления параллельныхъ искомымъ составляющихъ въ точкахъ B и C .



черт. 12a.



черт. 12b.

Переносъ въ эти точки силы, равныя по величинѣ и направленію OC и $C2$, мы можемъ, въ свою очередь, разложить эти составляющія, задавши общимъ направленіемъ BC и двумя заданными направленіями параллельныхъ составляющихъ. Проведя въ треугольникѣ силъ черезъ полюсъ прямую $C1$ параллельно BC , видимъ, что сила OC разложится по 01 и $1C$, а сила $C2$ разложится на $C1$ и 12 .

Дѣйствіе силъ $C1$ и $1C$, какъ равныхъ и прямопротивуположныхъ, взаимно уничтожится, и останутся двѣ силы 01 и 12 , которыя мы и откладываемъ на заданныхъ направленіяхъ.

10. Общій случай нахожденія двухъ параллельныхъ силъ, уравновѣшивающихъ данную. Если мы дадимъ теперь полученнымъ въ предыдущемъ n^0 , составляющимъ обратныя направленія, то ясно, что ихъ равнодѣйствующая будетъ равна и прямо противоположна данной силѣ P , слѣдовательно ее уравновѣситъ.

Такимъ образомъ, всякую данную силу мы можемъ уравновѣсить двумя силами, ей параллельными и обратно направленными.

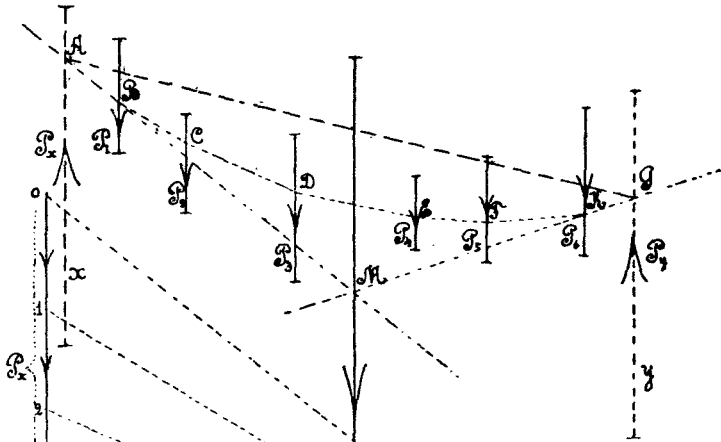
Вопросъ не измѣнится, если намъ дано будетъ нѣсколько параллельныхъ силъ, такъ какъ тогда можемъ ихъ привести къ одной равнодѣйствующей по извѣстному методу графическаго сложения.

Положимъ, что нѣсколько параллельныхъ силъ $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \dots$ (черт. 13a) надо уравновѣсить двумя силами, имъ параллельными, которыхъ положенія извѣстны (X, Y).

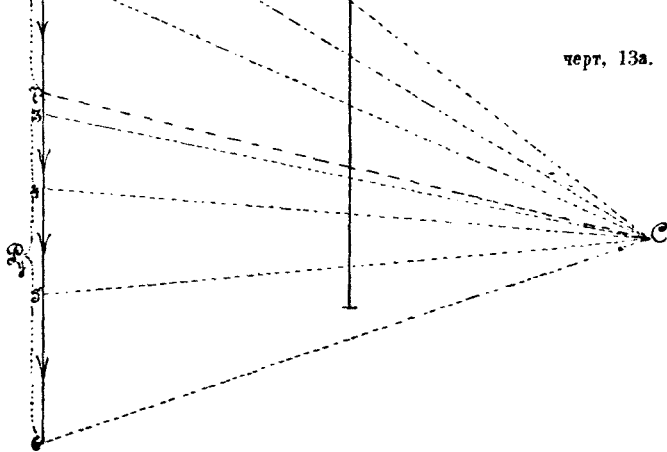
Строимъ многоугольникъ силъ (черт. 13b), выбираемъ произвольный полюсъ C , проводимъ лучи, строимъ веревочный многоугольникъ $ABCDEFKG$. (черт. 13a) и находимъ точку пересѣченія M крайнихъ лучей, черезъ которую пройдетъ равнодѣйствующая. Последнюю уравновѣсимъ двумя ей параллельными силами P_x и P_y , величины которыхъ найдемъ, какъ и въ предыдущемъ n^0 , изъ многоугольника силъ, проведя лучъ $C7$ параллельно линіи $A g$.

11. Разложеніе силы на три направленія, не пересѣкающіяся въ одной точкѣ. До сихъ поръ мы разлагали силу на двумъ направленіямъ, пользуясь этимъ способомъ, можемъ теперь разложить данную силу

по тремъ заданнымъ направлениямъ, непересекающимся въ одной точкѣ. Положимъ, что силу R требуется разложить на три направления X Y и Z (черт. 14а); вмѣсто двухъ направлений X и Y , можемъ

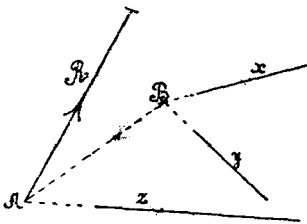


черт. 13а.

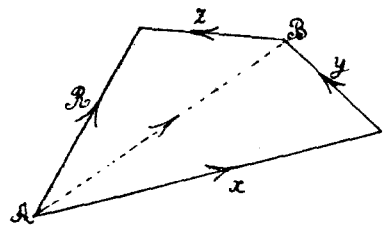


черт. 13б.

принять одно, — пока неизвѣстное, — направление ихъ равнодѣйствующей. Но въ тоже время это направление будетъ направлениемъ



черт. 14а.



черт. 14б.

составляющей для силы R , другая составляющая которой будет имѣть направление Z . Очевидно, что направление равнодѣйствующей силъ X и Y и составляющей силъ R должно проходить черезъ точки B и A пересѣченія, съ одной стороны направленія X и Y , съ другой стороны— R и Z . Получивъ, такимъ образомъ, направление AB , уже легко разложить сперва силу R по направленіямъ Z и AB , а силу AB , въ свою очередь, по направленіямъ X и Y .

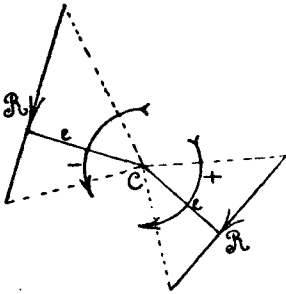
Такое построение сдѣлано на чертежѣ 14b и понятно безъ особыхъ поясненій.

Если бы было задано болѣе трехъ направленій, то задача имѣла бы безчисленное множество рѣшеній; задача была бы также неопредѣленною, если бы три направленія пересѣкались въ одной точкѣ по направленію силы R .

Г Л А В А 2-ая

Моментъ дѣйствующихъ силъ.

12. Понятіе. Кромѣ движенія поступательнаго, тѣло можетъ имѣть еще вращательное движеніе. Это послѣднее движеніе характеризуется не одной величиною силы, но и разстояніемъ ея до точки вращенія, называемымъ плечомъ силы.



черт. 15.

Произведени Re (черт. 15) измѣряетъ вращательное усиліе и называется статическимъ моментомъ дѣйствующей силы.

Геометрически, моментъ представляется двойной площадью треугольника, основаніемъ котораго служитъ величина силы, а вершиною точка C . Согласно тому, что вращеніе можетъ быть двояко: въ сторону вращенія часовой стрѣлки и обратно,—моменты бываютъ положительные и отрицательные.

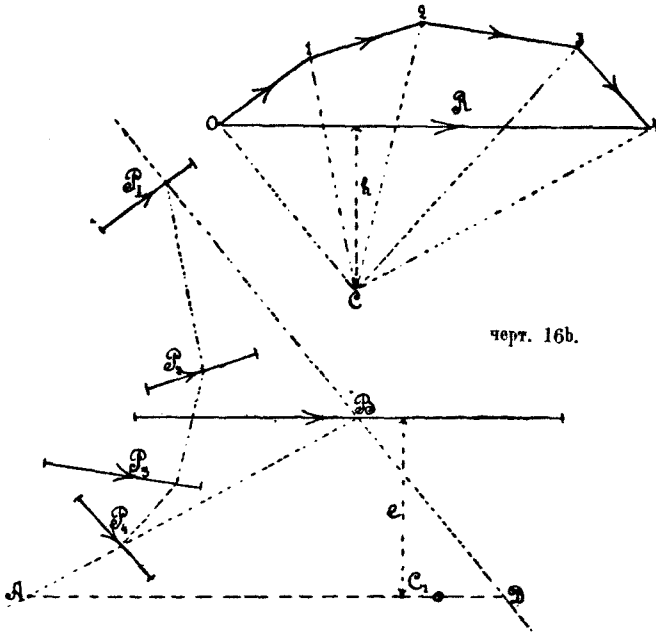
13. Опредѣленіе статическаго момента нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости. Въ томъ случаѣ, когда требуется опредѣлить моментъ нѣсколькихъ силъ, направленныхъ подъ угломъ другъ къ другу, должно найти сперва равнодѣйствующую данныхъ силъ, а затѣмъ уже, измѣривъ величину ея по масштабу силъ, а разстояніе отъ точки вращенія до нея—по масштабу разстоянія, то найди произведеніе этихъ величинъ, получимъ, что $M = R \cdot e$.

Если-бы потребовалось построить найденный моментъ, то можно было бы найти его, какъ четвертую пропорціональную изъ выраженія

$M = \frac{R \cdot e}{1}$. Но опредѣленіе графическимъ путемъ статическаго момента

удобнѣе сдѣлать, по нижеслѣдующимъ соображеніямъ. Построивъ для данныхъ силъ P_1, P_2, P_3 и P_4 , многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ (черт. 16a и 16b), проведемъ, черезъ данную точку вращенія C_1 прямую, параллельную равнодѣйствующей R , и, замыкая A и D —точки пересѣченія этой прямой съ крайними лучами веревочнаго многоугольника, мы получимъ треугольникъ ABD , который будетъ подобенъ треугольнику CO_4 (черт. 16b). Изъ подобія же ихъ слѣдуетъ, что $\frac{R}{h} = \frac{AD}{e}$, откуда $AD \cdot h = R \cdot e = M_{C_1}$, т. е. равно мо-

менту относительно оси вращения C_1 . Въ этомъ равенствѣ, h есть расстояние отъ полюса до равнодѣйствующей; слѣдовательно, статическій моментъ равенъ произведенію разстоянія отъ полюса до равнодѣй-



черт. 16b.

черт. 16a.

ствующей на отръзокъ, полученный отъ пересѣченія крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника на прямой, параллельной равнодѣйствующей и проходящей черезъ точку вращения C_1 . Знакъ момента, согласно принятому обозначенію, зависитъ отъ того, въ какую сторону происходитъ вращеніе: въ нашемъ случаѣ онъ будетъ положительнымъ.

Такъ какъ въ опредѣленіи момента полюсное разстояніе h произвольно, то мы его выберемъ такъ, чтобы оно было равно 1, 10, 100 . . . вообще 10^n , т. к. въ такомъ случаѣ упростится вычисленіе момента.

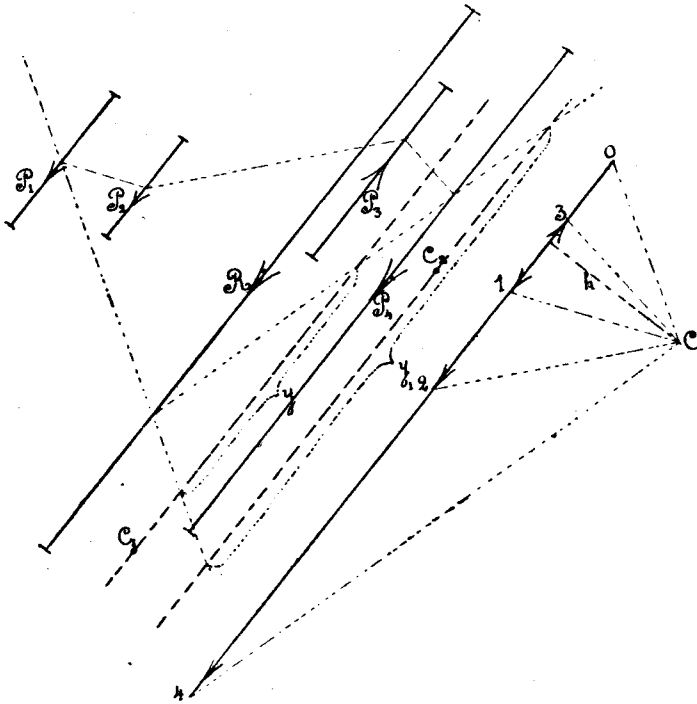
Далѣе очевидно для опредѣленія величинъ AI и h необходимо имѣть два масштаба: одинъ для силъ и другой для разстояній, при чемъ безразлично, по какому масштабу, измѣрять AI и по какому h , т. к. произведеніе отъ этого не измѣнится.

14. Моментъ параллельныхъ силъ. Рѣшимъ теперь подобную-же задачу для силъ параллельныхъ.

Построимъ многоугольникъ силъ, выберемъ полюсъ, проведемъ лучи и построимъ веревочный многоугольникъ (черт. 17a и b); проведемъ далѣе черезъ точку вращения C_1 прямую параллельную силамъ, найдемъ на ней отръзокъ y , получаемый при пересѣченіи ея крайними лучами веревочнаго многоугольника, тогда $M_{C_1} = h \cdot y$.

Если нужно найти моментъ относительно другой точки вращения

C_2 , то получили бы $M_{C_2} = h \cdot y_1$, т. е. въ выраженіи момента h будетъ постояннымъ, слѣдовательно, моментъ пропорціоналенъ отрезкамъ y_1 .



черт. 17а и в.

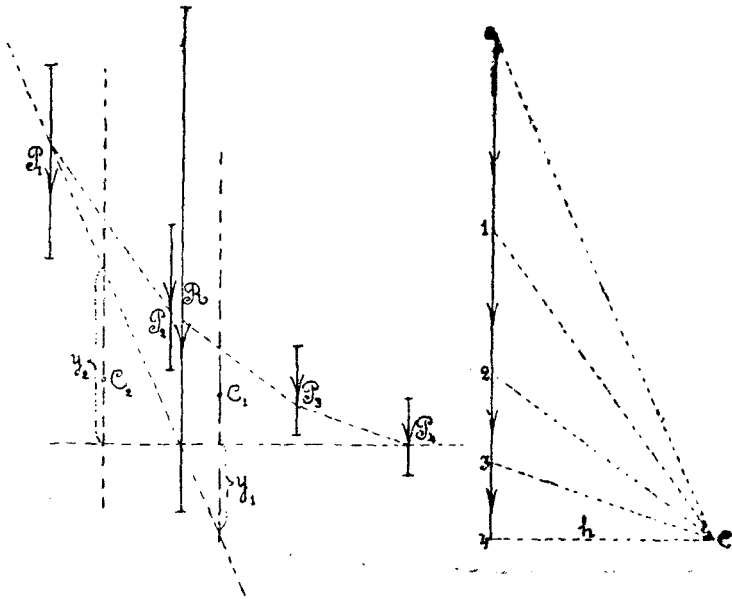
Если при построении выбрать полюсъ такъ, чтобы послѣдній лучъ былъ перпендикулярнымъ къ многоугольнику силъ (черт. 18b) и принять направление этого луча за ось абсциссъ, то увидимъ, что, отрезки y_1 и y_2 будутъ ординатами веревочнаго многоугольника, причемъ знакъ момента будетъ зависетьъ отъ знака ординаты.

15. Условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на свободное тѣло. Для равновѣсія тѣла необходимо, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ силъ была равна нулю, и моментъ ея относительно произвольной оси равнялся бы также нулю. Для выраженія этого условія графически, замѣтимъ, что равнодѣйствующая выражается замыкающей стороной многоугольника силъ, слѣдовательно, если сторона эта будетъ равна нулю, т. е. многоугольникъ будетъ сомкнутый (черт. 19b), то равнодѣйствующая будетъ тоже нулю.

Но мы уже раньше видѣли, что одного этого условія недостаточно для равновѣсія тѣла, ибо пара силъ, производящая вращательное движеніе, при сложении даетъ равнодѣйствующую тоже равную нулю. (n° 7).

Необходимо, слѣдовательно, кромѣ того, чтобы крайніе лучи веревочнаго многоугольника, представляющіе, какъ извѣстно, силы, замѣняющія дѣйствіе всѣхъ силъ P_1, P_2, P_3 и P_4 , совпали бы по поло-

женію, т. е., чтобы линия Dd слилась съ линією Aa , иначе, вмѣсто данной системы силъ, получимъ пару Dd и Aa .



черт. 18а и б.

Итакъ, для равновѣсія силъ, лежащихъ въ одной плоскости и дѣйствующихъ на твердое тѣло, необходимо и достаточно имѣть два условія:

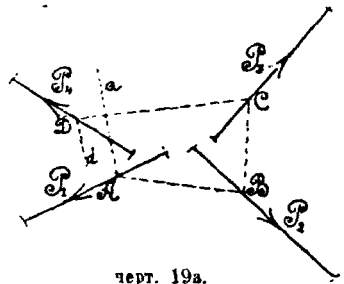
1) *Многоугольникъ силъ долженъ быть замкнутымъ* и 2) *направленія крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника должны совпадать, т. е. веревочный многоугольникъ долженъ быть тоже замкнутымъ.*

ГЛАВА 3-ая

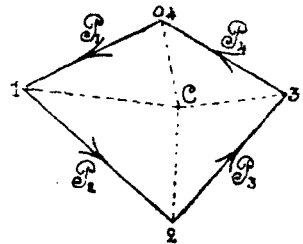
Опоры плоскихъ системъ и ихъ реакціи.

16. Методы затвердванія и отсѣченія.

Разсмотрѣвъ условіе статическаго равновѣсія твердаго тѣла, подверженнаго дѣйствію внѣшнихъ силъ, перейдемъ теперь къ опредѣленію самихъ этихъ внѣшнихъ силъ, дѣйствію которыхъ можетъ подвергаться твердое тѣло, и постараемся опредѣлить тѣ внутреннія силы, которыя развиваются въ разныхъ частяхъ сооруженія.



черт. 19а.



черт. 19б.

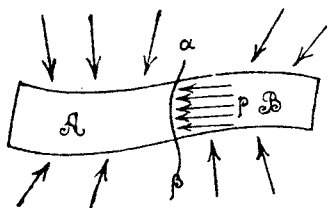
Внѣшнія силы раздѣляются на силы *активныя* и сопротивленія *опоръ*, или силы *пассивныя*.

Активныя силы, къ которымъ относится и вѣсъ самого сооруженія, величины извѣстныя, а потому наша задача сводится къ опредѣленію не только упомянутыхъ выше внутреннихъ напряженій, но предварительно къ опредѣленію опорныхъ сопротивленій или опорныхъ реакцій.

Для опредѣленія этихъ опорныхъ сопротивленій примѣнимъ общій *методъ затверднѣнія*, который состоитъ въ томъ, что всякое сооруженіе, находящееся въ равновѣсїи, разсматривается, какъ твердое тѣло, къ которому могутъ быть приложены общія условія равновѣсїя всѣхъ приложенныхъ къ нему силъ.

На самомъ дѣлѣ, въ природѣ нѣтъ тѣлъ совершенно твердыхъ, но всякое тѣло упруго въ большей или меньшей степени, поэтому, при дѣйствіи на тѣло сила оно измѣняетъ свою форму (деформируется), слѣдовательно, перемѣщаются точки приложенія силъ, и, при установившемся равновѣсїи, пришлось бы принимать во вниманіе не первоначальное положеніе силъ, а конечное, что значительно усложнило бы вопросъ. Методъ затверднѣнія игнорируетъ эту деформацию и разсматриваетъ положеніе силъ *до деформации*. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, однако, этого сдѣлать нельзя, какъ, напримѣръ, при разсмотрѣнїи напряженій въ пружинахъ, въ которыхъ измѣненія настолько значительны, что ими пренебрегать нельзя. Въ нашихъ же случаяхъ совершенно достаточно пользоваться методомъ затверднѣнія.

Для опредѣленія внутреннихъ силъ будемъ пользоваться методомъ *отсѣченія*, сущность котораго состоитъ въ слѣдующемъ: данное твердое тѣло, подверженное дѣйствію внѣшнихъ силъ и находящееся въ равновѣсїи, разсѣкаемъ произвольнымъ сѣченіемъ $\alpha\beta$ въ желаемомъ мѣстѣ на двѣ части (черт. 20) A и B ; отбрасывая дагдѣ мысленно одну изъ частей, напр. B со всѣми къ ней приложенными силами, мы тѣмъ самымъ нарушаемъ равновѣсїе, а потому, для возстановленія его необходимо къ сѣченію $\alpha\beta$ приложить силы, которыя замѣнили бы для части A вліяніе отброшенной части B . Такимъ образомъ силы p являются *внѣшними* силами для части A и въ то же время *внутренними* силами для всего тѣла. Найденныя изъ



черт. 20.

условій равновѣсїи части A силы p , очевидно, статически равнозначны съ действительными внутренними силами, проявляющимися въ сѣченіи $\alpha\beta$.

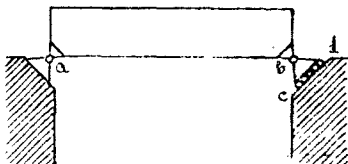
17. Виды опоръ плоскихъ системъ. Каждое сооруженіе или его часть представляетъ изъ себя несвободное тѣло, соприкасающееся или скрѣпленное съ другими тѣлами, поэтому, оно не можетъ свободно перемѣщаться. Сопротивленія, оказываемые передвиженію тѣла, носятъ названіе реакцій или сопротивленій опоръ и статически равнозначны одной или нѣсколькимъ силамъ. Эти реакціи, очевидно, равны и прямо противоположны тому давленію, которое производитъ сооруженіе на опоры. Если отбросить самыя опоры и замѣнить ихъ дѣйствіе реакціями, то можно разсматривать тѣло, какъ свободное подѣ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, находящихя въ равновѣсїи, и, слѣдовательно, къ нему можно приложить извѣстныя условія равновѣсїя свободного тѣла. Эти

условія и служатъ для опредѣленія самихъ опорныхъ реакцій. Такъ какъ для нашего случая, т. е. когда силы расположены въ одной плоскости, существуетъ три уравненія равновѣсія, а именно: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$, т. е., что проекціи всѣхъ силъ активныхъ и пассивныхъ, дѣйствующихъ на тѣло, взятыя на двѣ координаты оси, были равны нулю и что моментъ ихъ относительно начала координатъ равенъ нулю, то очевидно, что для опредѣленнаго рѣшенія вопроса о нахожденіи опорныхъ реакцій должно существовать не болѣе трехъ неизвѣстныхъ.

При такомъ условіи, задача, слѣдовательно, можетъ быть рѣшаема только помощью уравненій статики и потому называется *статически опредѣлимой*. Въ противномъ случаѣ, когда число неизвѣстныхъ болѣе трехъ, задача *статически неопредѣлима*, и для нахожденія опорныхъ реакцій приходится прибѣгать къ разсмотрѣнію упругихъ деформаций тѣла.

Разсмотримъ ближе признаки статической опредѣлимости опорныхъ сопротивленій для плоскихъ системъ, но предварительно ознакомимся съ видами самихъ опоръ.

Если опорная точка a тѣла неподвижно закрѣплена (черт. 21) въ плоскости дѣйствія силъ, то тѣло можетъ свободно вращаться около этой точки. Такая опора называется *неподвижной шарнирной*. Очевидно, что для опредѣленія ея реакціи необходимо найти двѣ неизвѣстныя: величину опорной реакціи и направленіе ея, т. к. таковая должна пройти для равновѣсія черезъ точку a ; или же надо найти двѣ проекціи на координатныя оси, расположенныя въ плоскости дѣйствія силъ.

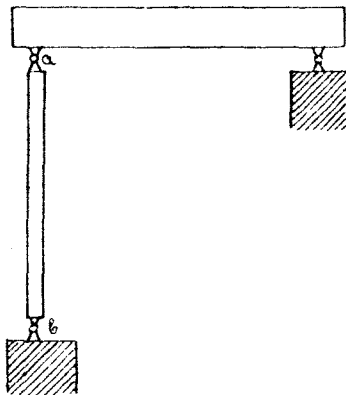


черт. 21.

Если опорная точка b можетъ свободно перемѣщаться по линіи cd (черт. 21), то такая опора называется *подвижной шарнирной*. Для ея опредѣленія необходимо знать одну неизвѣстную, именно: величину опорной реакціи, такъ какъ, во-первыхъ, она должна пройти черезъ точку b и, во-вторыхъ, быть перпендикулярна къ линіи скольженія cd . Или же надо найти одну изъ проекцій на координатныя оси, т. к. другая проекція вслѣдствіе заданнаго направленія есть функція первой.

Къ послѣдней категоріи можно отнести такъ называемыя *качающіяся опоры* (черт. 22) ab , т. к. для опредѣленія ея сопротивленія необходимо знать одну неизвѣстную—величину, направленіе-же ея должно быть черезъ точки a и b .

Кромѣ шарнирныхъ опоръ, употребляются еще такъ называемыя плоскія опоры двухъ родовъ, *неподвижныя плоскія опоры* (черт. 23) и *подвижныя* (черт. 24) (a). Очевидно, что для опредѣленія опорнаго сопротивленія неподвижной плоской опоры необходимо найти три



черт. 22.

неизвѣстныя: величину, направление и точку приложения опорной реакціи; для подвижной же плоской опоры—двѣ неизвѣстныя—величину и точку приложения, т. к. направление должно быть перпендикулярно къ линіи скольженія.



черт. 23.



черт. 24.

18. Условіе статической опредѣлимости опорныхъ реакцій простыхъ плоскихъ системъ. Мы видѣли, что для статической опредѣлимости опорныхъ реакцій *необходимо*, чтобы число неизвѣстныхъ было не болѣе трехъ, т. к. для силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости и приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, существуютъ три уравненія равновѣсія, а именно:

$$\Sigma X = 0; \Sigma V = 0 \text{ и } \Sigma M = 0.$$

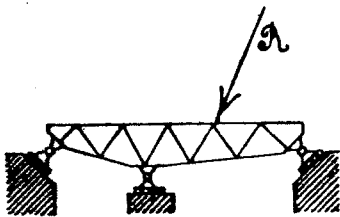
Такимъ образомъ, системы, указанные на чертежахъ 21 и 22, статически опредѣлимы, относительно опорныхъ реакцій; а системы, представленныя на чертежахъ 23, 24 и 25, статически неопредѣлимы, такъ какъ въ первыхъ двухъ случаяхъ число неизвѣстныхъ для опредѣленія опорныхъ сопротивленій равно $2 + 1$ и $1 + 2$, т. е.



черт. 25.

числу уравненій равновѣсія, а въ остальныхъ трехъ случаяхъ число неизвѣстныхъ равно $2 + 3$, $2 + 2$ и $2 + 2$, т. е. большому числу, чѣмъ число уравненій.

Но не всегда представляется возможнымъ опредѣлить съ перваго взгляда статически опредѣлима или нѣтъ данная система. Это происходитъ оттого, что существованіе трехъ уравненій для рѣшенія вопроса *необходимо*, но этого еще *недостаточно*; требуется еще, чтобы ни одно уравненіе не обращалось въ *тождество*, и чтобы *совмѣстное существованіе ихъ было возможно*.

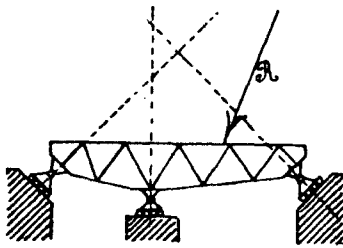


черт. 26.

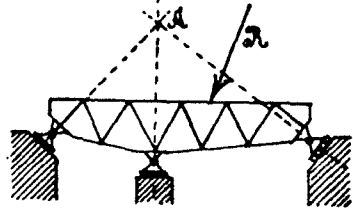
Такъ, наприимѣръ, система, изображенная на чертежѣ 26, статически опредѣлима, т. к. число неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій равно $1 + 1 + 1 = 3$; но здѣсь надо замѣтить, что она будетъ таковою только въ томъ случаѣ, если опорныя сопротивленія, направленіе которыхъ должно быть перпендикулярно къ линіи скольженія, не пересѣкаются въ одной точкѣ (черт. 27), т. к. въ такомъ случаѣ представляется возможнымъ разложить силу R на три направленія, лежащія въ одной плоскости и не пересѣкающіяся въ одной точкѣ.

Въ случаѣ же, если направленіе опорныхъ реакцій пересѣкается въ одной точкѣ A и сила R не проходитъ черезъ ту же точку, то задача невозможна (черт. 28),

т. к. равнодѣйствующая R и составляющія ея (опорныя реакціи) должны имѣть общую точку.



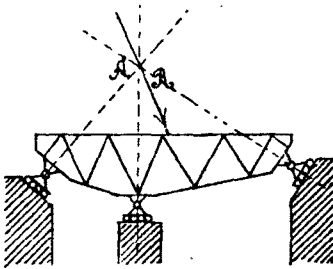
черт. 27.



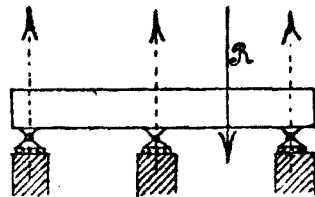
черт. 28.

Въ этомъ случаѣ, принимая начало координатъ въ точкѣ A , легко видѣть, что уравненіе равновѣсія $\Sigma M = 0$ возможно лишь тогда, когда $R = 0$. Далѣе если сила R проходитъ черезъ точку A (черт. 29), общую точку пересѣченія трехъ опорныхъ реакцій, то задача неопредѣленная, и легко видѣть, что, принимая начало координатъ въ той же точкѣ A , уравненіе равновѣсія $\Sigma M = 0$ обращается въ тождество.

Также система, изображенная на чертежѣ 30, какъ частный случай предыдущаго, когда всѣ сопротивленія вертикальны, т. е. пере-



черт. 29.



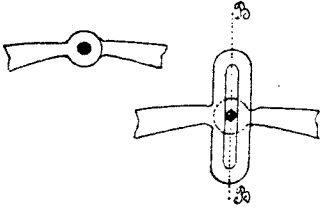
черт. 30.

сѣкаются въ бесконечности, статически неопредѣлима, хотя число неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій и равно 3. Въ случаѣ, если сила R не параллельна общему направленію реакцій—задача невозможна, если же сила R параллельна—то задача неопредѣленная, т. к. разложеніе силы на три ей параллельныя направленія имѣетъ безчисленное множество рѣшеній. Выбирая ось y ^{овв} параллельно общему направленію опорныхъ сопротивленій, не трудно видѣть, что въ первомъ случаѣ существованіе уравненія $\Sigma V = 0$ возможно, если $R = 0$, во второмъ случаѣ это уравненіе обращается въ тождество.

Итакъ, для статической опредѣлимости простой плоской системы необходимо и достаточно, чтобы число неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій было не больше трехъ и чтобы ни одно изъ уравненій не обращалось въ тождество и чтобы совмѣстное существованіе ихъ было возможно.

19. Условіе статической опредѣлимости опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ. Сложными плоскими системами называются такія, въ которыхъ, кромѣ опорныхъ шарнировъ, существуютъ еще проме-

жуточные шарниры двухъ видовъ: неподвижный промежуточный шарниръ (черт. 31), дающій системѣ возможность вращаться около своей неподвижной оси, и подвижной промежуточный шарниръ, допускающій (черт. 32), кромѣ вращенія около его оси, поступательное перемѣщеніе по лин. *BB*.



черт. 31 и 32.

Очевидно, что для равновѣсія системы силъ, приложенныхъ съ одной стороны промежуточного неподвижнаго шарнира, необходимо, чтобы сумма моментовъ ихъ относительно его оси была равна нулю. Для промежуточного подвижнаго шарнира къ предыдущему условию прибавляется еще, чтобы сумма проекцій тѣхъ же силъ на линію скольженія *BB* была равна нулю.

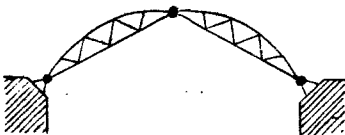
Такимъ образомъ, къ тремъ общимъ условиямъ равновѣсія $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$, прибавляются еще вышеприведенныя условия для промежуточныхъ шарнировъ $\sum M_1 = 0$ и $\sum PC \cos(P, BB) = 0$.

Если обозначить число неизвѣстныхъ черезъ *m*, число неподвижныхъ промежуточныхъ шарнировъ черезъ *n*₁, и число подвижныхъ промежуточныхъ шарнировъ черезъ *n*₂, то необходимое условие статической опредѣлимости опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ выразится

$$m = 3 + n_1 + 2n_2$$

Итакъ, для статической опредѣлимости опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ необходимо, чтобы число неизвѣстныхъ *m* было равно числу промежуточныхъ неподвижныхъ шарнировъ, сложенному съ удвоеннымъ числомъ промежуточныхъ подвижныхъ шарнировъ (*2n*₂) плюсъ 3. Условіе это будетъ достаточно, если ни одно изъ уравненій равновѣсія не обращается въ тождество и всѣ они возможны. Если $m > 3 + n_1 + 2n_2$, то система статически неопредѣлима, если $m < 3 + n_1 + 2n_2$ т. е. число неизвѣстныхъ меньше числа уравненій, то система возможна лишь тогда, когда выполнены $3 + n_1 + 2n_2 - m$ условий, которымъ должны удовлетворять активныя силы, чтобы могло существовать равновѣсіе.

Простѣйшій типъ сложной плоской системы, статически опредѣлимый, представляетъ изъ себя трехъ—шарнирная арка (черт. 33), въ которой число неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій равно $2 + 2$.



черт. 33.

Число уравненій равновѣсія можно составить: 3 общихъ уравненія и 1 для неподвижнаго промежуточнаго шарнира, т. е. всего 4.

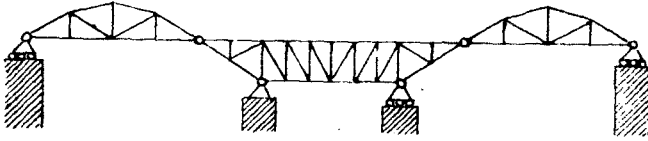
Еще простѣйшій типъ представляетъ многопролетная шарнирная балка (черт. 34), имѣющая одну неподвижную шарнирную опору, а остальные—подвижныя шарнирныя. Для такой системы

$$m = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7, n_1 = 1, n_2 = 0;$$



черт. 34.

следовательно, условие статической определенности будет $7 = 3 + 4$. Таковой же тип статически определенной системы относительно опорных реакций представлен на чертежъ 35. На черт. 36 изобра-

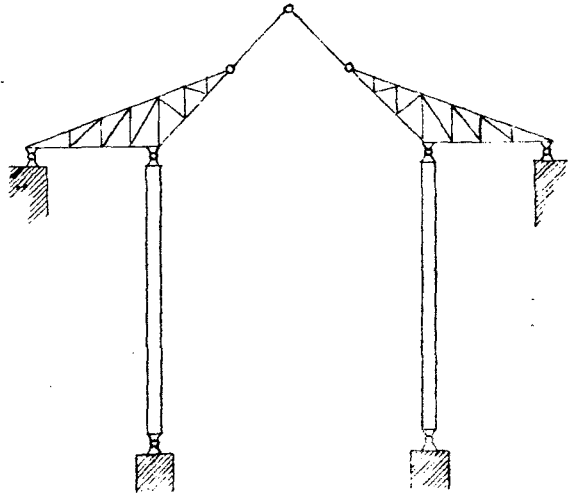


черт. 35.

жено схематически перекрытие паровозо-сборной мастерской Николаевской желѣзной дороги, примененное впервые профессоромъ Ф. С. Ясинскимъ, съ двумя качающимися опорами и съ двумя неподвижными шарнирными. Помѣщенные между свѣшивающимися фермами три неподвижныхъ промежуточныхъ шарнира дѣлаютъ систему статически определенной относительно опорныхъ реакций, такъ какъ число неизвѣстныхъ равно $m = 2 + 1 + 1 + 2 = 6$.

Уравненій равновѣсія общихъ для всей системы 3, а для трехъ промежуточныхъ неподвижныхъ шарнировъ еще 3, а всего 6.

Изображенная на чертежѣ 37 система трехъ—шарнирныхъ арокъ, служащихъ для перекрытія вокзала во Франкфуртѣ на Майнѣ



черт. 36.



черт. 37.

представляетъ систему статически неопредѣлимую, такъ какъ число неизвѣстныхъ равно

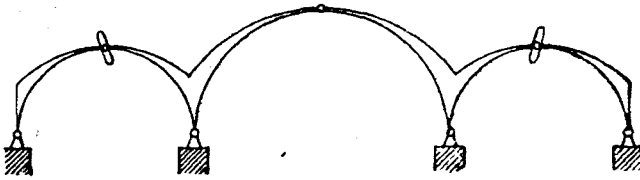
$$2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$

а число уравненій равновѣсія $3 + 3 = 6$.

Чтобы сдѣлать ее статически определенной, можно вмѣсто двухъ

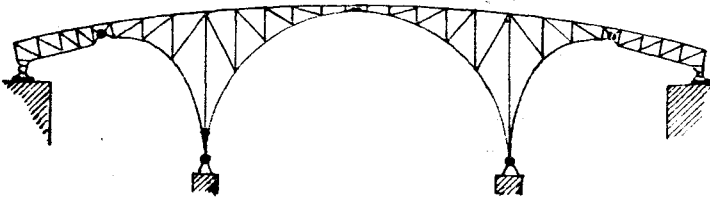
боковых промежуточных неподвижных шарниров помѣстить подвижные (черт. 38); тогда число неизвѣстныхъ будетъ тоже равно 7-ми, а число уравненій равновѣсія можно составить такъ:

$$3 + 1 + 2 \times 2 = 8.$$



черт. 38.

На черт. 39-мъ изображенъ схематически построенный въ г. Павловскѣ обществомъ Батиньоль пѣшеходный мостикъ, по системѣ уравновѣшенныхъ арокъ, по каковой системѣ построенъ и Троицкій



черт. 39.

мостъ въ СПБ. Для этой системы число неизвѣстныхъ равно

$$1 + 2 + 2 + 1 = 6;$$

число уравненій равновѣсія можно составить: 3 общихъ, 3 для трехъ промежуточныхъ неподвижныхъ шарнировъ.

20. Аналитическіе признаки совместиости уравненій равновѣсія. Если опоры будутъ шарнирныя или качающіяся въ сложной плоской системѣ, то неизвѣстными будутъ только проекціи опорныхъ сопротивленій, и тогда очевидно, что уравненія равновѣсія будутъ линейными относительно этихъ проекцій; поэтому ихъ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k &= -R_x \\ B_1 y_1 + B_2 y_2 + \dots + B_k y_k &= -R_y \\ C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_k x_k + D_1 y_1 + D_2 y_2 + \dots + D_k y_k &= -M. \\ E_1 x_1 + E_2 x_2 + \dots + E_r x_r + F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_r y_r &= -M_1 \\ \dots &\dots \\ G_1 x_1 + G_2 x_2 + \dots + G_s x_s + H_1 y_1 + H_2 y_2 + H_s y_s &= \Sigma P \cos(P_1 BB) \end{aligned} \right\} A.$$

гдѣ: A, B, C, \dots, H — коэффициенты, зависящіе только отъ размѣровъ тѣла, но не зависящіе отъ внѣшнихъ силъ.

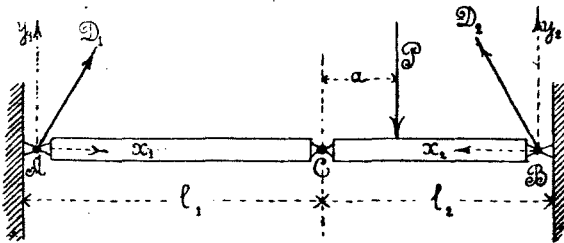
$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ суть проекціи неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій на двѣ координатныя оси, лежащія въ плоскости дѣйствующихъ силъ;

R_x и R_y — проэкции на тѣ-же оси равнодѣйствующей всѣхъ внѣшнихъ активныхъ силъ.

b_1, b_2, \dots , то $z_k = \infty$, что указывает вообще на невозможность равновесия данной системы. В частном случае и определитель D_k может быть равен нулю одновременно с D для всех значений z , следовательно, тогда получатся неопределенные решения для $z = \infty$ вида $\frac{0}{0}$, это укажет на то, что для частных значений сил равновесие возможно, но система статически неопределима.

Отсюда следует, что для статической определенности сложной плоской системы по отношению ее опорных реакций, необходимо и достаточно, чтобы число неизвестных m равнялось числу промежуточных неподвижных шарниров n_1 , сложенному с удвоенным числом подвижных промежуточных шарниров $2n_2$, плюс три, и чтобы определитель уравнений равновесия был отличен от нуля.

Для пояснения способа применения выведенных уравнений решим задачу, представленную на черт. 40. На горизонтальную балку



черт. 40.

с промежуточным неподвижным шарниром действует вертикальная сила P , надо решить, статически, определима данная система, или нет.

Необходимое условие для статической определенности здесь выполнено, так как число неизвестных для определения опорных сопротивлений $2 + 2$, а число уравнений равновесия можно составить $3 + 1$, т. е., тоже 4. Для окончательного решения вопроса необходимо определить, будет ли детерминант отличен от нуля, т. е. узнать, выполнено ли достаточное условие статической определенности.

Для этого напишем уравнения равновесия и найдем определитель. Предположим, что искомыми опорными сопротивлениями будут D_1 и D_2 , относим далее балку к системѣ прямоугольных координатных осей, выберем ось X горизонтальной, а Y вертикальной с началом координат в точке A , разложим опорные реакции по этим осям, назовем соответственно проекции реакции D_1 через x_1 и y_1 , а $-D_2$ через x_2 и y_2 , тогда уравнения B примут вид

$$\begin{aligned} 1. \quad & x_1 + 0. y_1 + 1. x_2 + 0. y_2 = 0 \\ 0. \quad & x_1 + 1. y_1 + 0. x_2 + 1. y_2 = -P \\ 0. \quad & x_1 + 0. y_1 + 0. x_2 - (l_1 + l_2) y_2 = -P(l_1 + a) \\ 0. \quad & x_1 + 0. y_1 + 0. x_2 - (l_2 - a) y_2 = -Pa \end{aligned}$$

Здесь первое уравнение представляет проекцию всех сил x_1, y_1, x_2, y_2 и P на ось $X_{\text{овс}}$, второе — тех же сил на ось $Y_{\text{овс}}$, третье — момент тех же сил относительно точки A и четвертое — момент сил, действующих справа шарнира C относительно его самого.

Опредѣлитель этихъ уравненій будетъ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(l_1 + l_2) \\ 0 & 0 & 0 & -(l_1 - a) \end{pmatrix}$$

Изъ теоріи опредѣлителей извѣстно, что опредѣлитель, имѣющій одинъ элементъ по діагонали, равной нулю, и всѣ элементы съ одной стороны діагонали тоже нули, самъ равенъ нулю, слѣдовательно, всѣ неизвѣстныя имѣютъ безконечныя рѣшенія, показывающія что равновѣсіе системы невозможно.

21. Вліяніе измѣненія температуры на опорныя реакціи. Внутреннія напряженія въ сооруженіи вызываються не только силами активными и пассивными, дѣйствующими на него, но могутъ быть вызваны еще измѣненіемъ температуры. Извѣстно, что твердыя тѣла съ повышеніемъ температуры расширяются, съ пониженіемъ же сжимаются; такимъ образомъ, напримѣръ, длинный болтъ, связывающій двѣ каменные стѣны и натянутый въ нагрѣтомъ состояніи, можетъ заставить сблизиться эти стѣны при своемъ охлажденіи; такимъ способомъ обыкновенно пользуются для приведенія одной изъ стѣнъ, отклонившейся отъ вертикальнаго положенія, въ прежнее положеніе. Жѣлѣзныя балки, плотно задѣланныя въ каменные стѣны, служили неоднократно причиной разрушенія этихъ стѣнъ въ случаѣ пожара въ зданіи.

Металлическая арка съ двумя неподвижными опорными шарнирами при повышеніи температуры удлиняется и производитъ давленіе на опоры, выражающееся увеличеніемъ горизонтальнаго распора, возбужденнаго внѣшними силами. Возможность появленія опорныхъ сопротивленій, а съ ними вмѣстѣ внутреннихъ напряженій въ сооруженіяхъ, явленіе неблагоприятное для послѣднихъ и его слѣдуетъ, по возможности, устранять.

Легко доказать, что *въ системахъ статически опредѣлимыхъ относительно опорныхъ реакцій, опорныя сопротивленія, возбуждаемыя измѣненіемъ температуры, равны нулю.*

Положимъ, что на данную статически опредѣлимую систему внѣшнія силы не дѣйствуютъ, а она подвергается лишь измѣненію температуры. Для опредѣленія опорныхъ реакцій нами были выведены уравненія:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \dots + a_{1n} z_n &= \sigma_1 \\ a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \dots + a_{2n} z_n &= \sigma_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1} z_1 + a_{m2} z_2 + \dots + a_{mn} z_n &= \sigma_m \end{aligned} \right\} B.$$

Опредѣливъ изъ нихъ проекціи опорныхъ сопротивленій, мы получимъ для нихъ общее выраженіе вида

$$z_k = \frac{D_k}{D},$$

гдѣ опредѣлитель D отличенъ отъ нуля, т. к. система предполагается статически опредѣлимой. Для нахождения опредѣлителя D_k мы должны, какъ извѣстно, замѣнить въ опредѣлитель D элементы вертикальнаго

к-ага столбца $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{km}$, соответственно величинами правой части уравнений, т. е. через v_1, v_2, \dots, v_m . Но эти величины зависят только от внешних сил, которых в данном, случае нѣтъ, следовательно, вмѣсто этихъ величинъ въ вертикальномъ столбцѣ опредѣлителя будутъ нули, а такой опредѣлитель самъ равенъ нулю, поэтому получимъ, что

$$Z_k = \frac{0}{D} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Введенное свойство системъ, опорныя реакціи которыхъ статически опредѣлимы, есть весьма важное ихъ преимущество. Системы, обладающія этимъ свойствомъ и опорныя реакціи которыхъ статически неопредѣлимы, составляютъ незначительное исключеніе, къ числу послѣднихъ относится многопролетная неразрѣзная балка съ однимъ неподвижнымъ опорнымъ шарниромъ и съ остальными подвижными.

Необходимо замѣтить, что измѣненіе температуры имѣетъ еще влияние на положеніе внешнихъ силъ, такъ какъ деформируетъ тѣло, но эти измѣненія настолько незначительны, что ими обыкновенно пренебрегаютъ и принимаютъ, что положеніе внешнихъ силъ остается такое же, какъ и до деформации отъ измѣненія температуры.

Г Л А В А 4-ая.

Способы опредѣленія опорныхъ реакцій плоскихъ системъ.

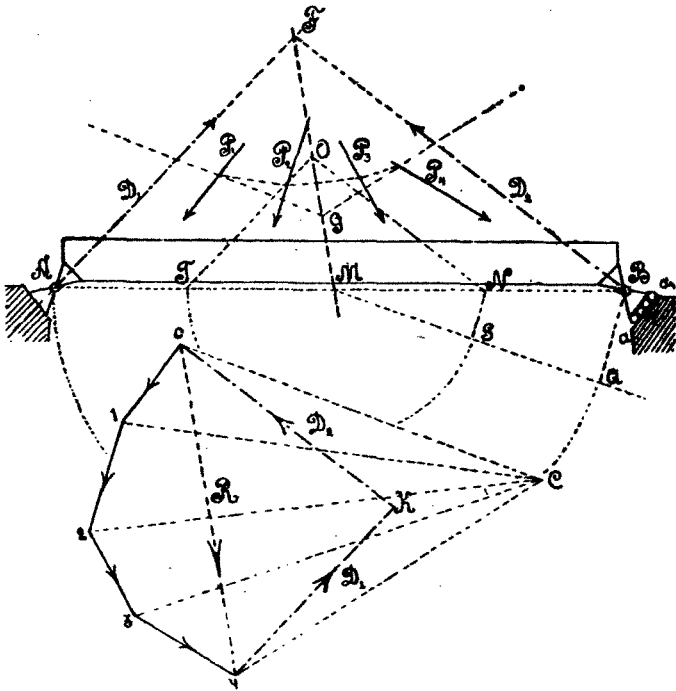
22. Опредѣленіе опорныхъ реакцій простыхъ плоскихъ системъ статически опредѣлимыхъ относительно опорныхъ реакцій, можетъ быть произведено аналитически или графически. Аналитическій способъ состоитъ въ рѣшеніи трехъ уравненій, которыя составляются какъ выше изложено, т. е., обозначая проекціи неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій черезъ X и Y , составимъ уравненія, выражающія, что сумма проекцій всѣхъ внешнихъ активныхъ и пассивныхъ силъ на 2 координатныя оси равна нулю и что сумма ихъ моментовъ относительно начала координатъ тоже равна нулю. Изъ этихъ уравненій и опредѣляются три неизвѣстныхъ проекціи опорныхъ сопротивленій. Не останавливаясь на этомъ способѣ, который очень простъ, перейдемъ къ графическому методу, который сводится къ простому сложению и разложенію силъ, пользуясь при этомъ многоугольникомъ силъ и веревочнымъ многоугольникомъ.

Положимъ, что имѣемъ балку, на двухъ шарнирныхъ опорахъ одной подвижной, другой неподвижной, подверженную дѣйствию силъ P_1, P_2, P_3 и P_4 (черт. 41).

Предварительно найдемъ равнодѣйствующую R и перенесемъ ее въ точку G пересѣченія крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника.

Разложимъ, дажѣ, эту силу R на двѣ составляющія, изъ которыхъ положеніе и точка приложенія одной и точка, черезъ которую проходитъ другая составляющая, извѣстны. Сопротивленіе правой

опоры B должно быть перпендикулярно къ линіи скользянія aa_1 и проходить черезъ точку вращенія опорнаго шарнира; продолжая эту



черт. 41.

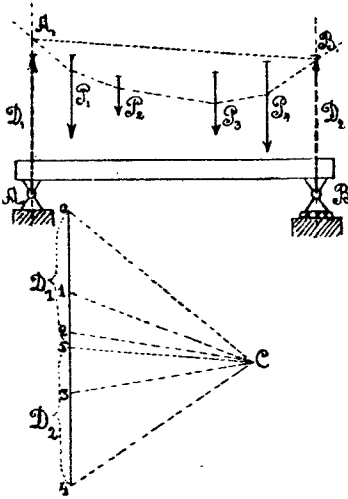
линію до пересѣченія въ точкѣ F съ равнодѣйствующей, видимъ, что другая составляющая должна пройти черезъ точку вращенія опоры A и черезъ точку F ; остается только въ многоугольникѣ силъ провести линіи OK и AK , параллельныя направленьямъ FB и FA , тогда получимъ отрезки AK и KO , соответственно равные и параллельные опорнымъ реакціямъ.

Въ случаѣ, если точка пересѣченія F не получается въ предѣлахъ чертежа, то можно найти положеніе опорнаго сопротивленія D_1 слѣдующимъ образомъ. Соединимъ точки вращенія опоръ A и B прямою линіей, выберемъ по направленію равнодѣйствующей произвольную точку O и проведемъ черезъ нее линію ON , параллельную направленію FB , тогда остается построить, чтобы $MN : MB = MT : MA$, что исполнено и понятно безъ особыхъ поясненій.

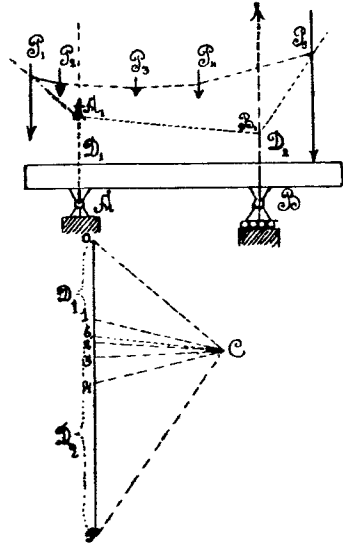
При расчетѣ балокъ намъ придется имѣть дѣло съ силами вертикальными и съ балками, имѣющими горизонтальное положеніе, въ такомъ случаѣ построеніе для нахождения опорныхъ сопротивленій еще проще. Построимъ для силъ P_1, P_2, P_3 и P_4 (черт. 42) Вариньоновскій и веревочный многоугольники, проведемъ черезъ опоры A и B вертикальныя линіи и найдемъ точки ихъ пересѣченія A_1 и B_1 съ первымъ и послѣднимъ лучами веревочнаго многоугольника. Проведенный въ многоугольникѣ силъ лучъ C_5 параллельно линіи $A_1 B_1$ разсѣчетъ

равнодѣйствующую Q_4 на два отрезка, равные опорнымъ сопротивленіямъ.

Остается еще указать на опредѣленіе опорныхъ сопротивленій для балки со свѣшивающимися концами (черт. 43).



черт. 42.



черт. 43.

По построеніи многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника, опредѣленіе опорныхъ реакцій сводится также къ проведенію въ Вариньоновскомъ многоугольникѣ луча Cb , параллельнаго линіи A, B_1 , соединяющей точки пересѣченія, крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника съ направленіями опорныхъ сопротивленій.

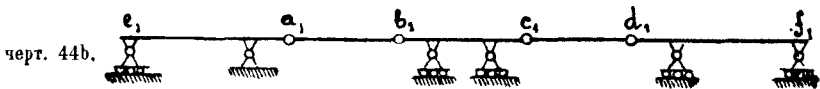
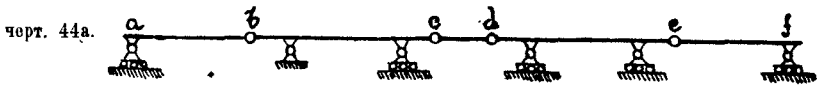
23. Опредѣленіе статически опредѣлимыхъ опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ. Для системъ статически опредѣлимыхъ, о которыхъ мы только и будемъ покуда говорить, аналитическій способъ сводится къ рѣшенію $m + 2n_2 + 3$ уравненій, которыя составляются вышеуказаннымъ образомъ.

Обозначая проекціи неизвѣстныхъ опорныхъ сопротивленій на 2 координатныя оси черезъ X_k и Y_k составимъ слѣдующія уравненія: 1) сумма проекцій всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ на ось $X^{овк}$ должна быть равна нулю, 2) тоже на ось $Y^{овк}$, 3) сумма моментовъ ихъ относительно начала координата равна нулю 4) сумма моментовъ всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, находящихся по одну сторону каждаго промежуточнаго шарнира, относительно его оси вращенія равна нулю и 5) сумма проекцій всѣхъ активныхъ и пассивныхъ силъ, находящихся по одну сторону промежуточнаго подвижнаго шарнира, взятая на направленіе его скольженія, также равна нулю.

Не останавливаясь на аналитическомъ способѣ, который простъ, перейдемъ снова къ графическому методу.

Простѣйшій типъ сложной плоской системы со статически опредѣлимыми опорными сопротивленіями представляетъ изъ себя много-

пролетная шарнирная балка съ одной неподвижной шарнирной опорой и съ остальными подвижными. Для изображенной на чертежѣ 44а балки, ясно, что части ея *ab*, *cd* и *ef* могутъ быть разсматриваемы



какъ балки, лежащія на двухъ опорахъ; части *bc* и *de* какъ таковыя же со свѣшивающимися концами, причеъ для этихъ послѣднихъ при опредѣленіи опорныхъ реакцій, къ дѣйствующимъ внѣшнимъ силамъ должны быть отнесены и давленія, производимыя на шарниры *b*, *c*, *d*, *e*, какъ на опоры балками *ab*, *cd* и *ef*.

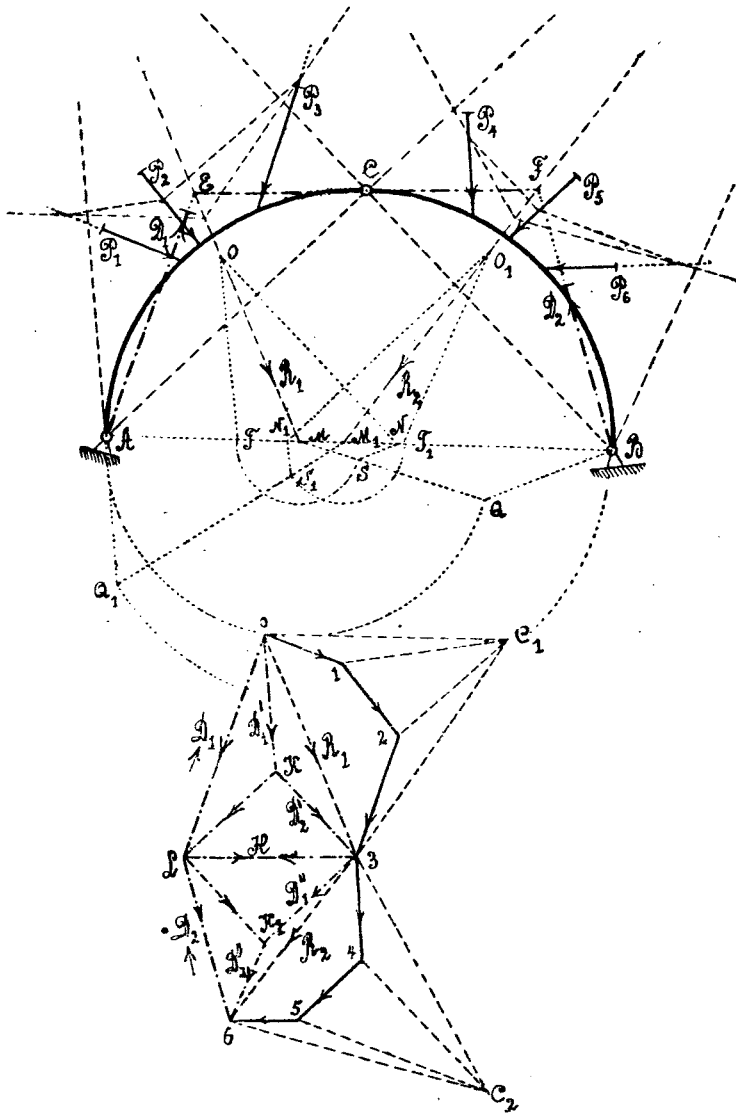
Также для балки (черт. 44б) части *a₁b₁* и *c₁d₁* надо разсматривать какъ балки, лежащія на двухъ опорахъ, и опредѣленные реакціи ихъ въ шарнирахъ *a₁*, *b₁*, *c₁* и *d₁* будутъ давленіями для балокъ *a₁a₂*, *b₁c₁* и *d₁f₁* со свѣшивающимися концами.

Вторымъ типичнымъ и простымъ примѣромъ сложной плоской системы, со статически опредѣлимыми опорными реакціями, можетъ служить трехшарнирная арка (черт. 45).

Сложимъ сперва все силы, находящіяся съ лѣвой стороны промежуточнаго шарнира, въ одну равнодѣйствующую R_1 и разложимъ ее на двѣ составляющихъ равныхъ и взаимно противоположныхъ опорнымъ реакціямъ отъ силъ P_1 , P_2 и P_3 . Направленіе правой реакціи будетъ извѣстно, оно должно проходить черезъ опору *B* и промежуточный шарниръ *C*, такъ какъ для правой части это будетъ единственная сила, которая должна находиться въ равновѣсїи съ силами въ лѣвой части арки, а такъ какъ условіе равновѣсїя требуетъ, чтобы моментъ силъ, находящихъся съ одной стороны промежуточнаго шарнира, былъ равенъ нулю, относительно его оси вращенія, то очевидно, что эта единственная сила съ правой стороны шарнира *C* должна пройти черезъ него и въ тоже время, какъ опорная реакція, черезъ опору *B*. Разложивъ, далѣе, силу R_1 на двѣ составляющихъ D'_1 и D'_2 , получимъ опорныя реакціи отъ силъ P_1 , P_2 и P_3 . Совершенно также поступаемъ съ силами P_4 , P_5 и P_6 , расположенными съ правой стороны шарнира *C*, получимъ сперва равнодѣйствующую R_2 , которую разложимъ на составляющія D''_1 и D''_2 . Теперь остается только сложить обѣ составляющія, какъ для лѣвой, такъ и для правой опоры; для чего перенесемъ параллельно самой себѣ силу D''_1 , выражаемую отрѣзкомъ $3K_1$, въ точку *K*, тогда получимъ точку *L*, соединивъ которую съ точкою *O* получимъ отрѣзокъ OK , равный сопротивленію лѣвой опоры L_1 . Также соединивъ точку *L* съ *O*, получимъ сопротивленіе правой опоры L_2 .

Что касается давленія въ самомъ шарнирѣ *C*, то оно должно находиться, съ одной стороны, въ равновѣсїи съ силами R_1 и D''_1 , а съ другой стороны съ R_2 и L_2 , слѣдовательно, величина давленія бу-

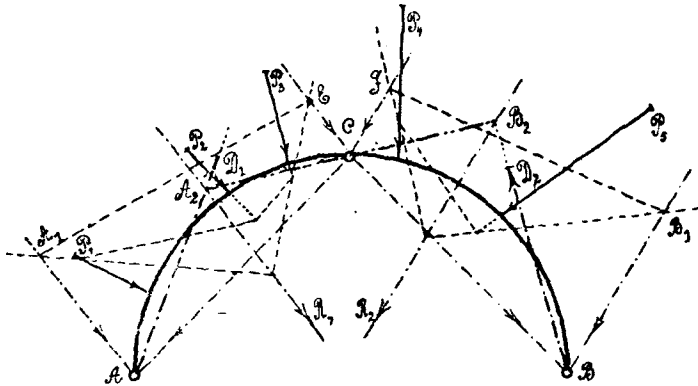
доть равна отрезку $L3 = H$, а направление его будетъ отъ лѣвой части $L3$, а отъ правой L .



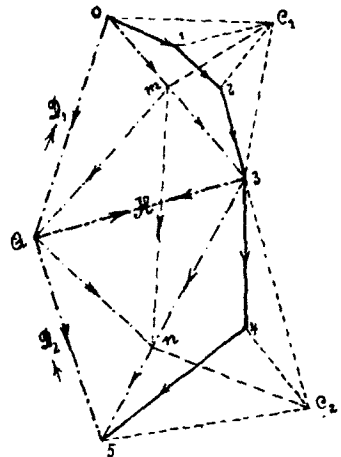
черт. 45.

Если чертежъ, слѣдовательно, сдѣланъ вѣрно то точки E, C и F должны находиться на одной прямой. Въ случаѣ, если пересѣченіе равнодѣйствующей и опорнаго сопротивленія не встрѣчается въ предѣлахъ чертежа, можно сдѣлать построение, разъясненное выше на черт. 41 и повторенное здѣсь.

Покажемъ еще второй способъ для опредѣленія опорныхъ реакцій въ трехшарнирной аркѣ. Разложимъ каждую равнодѣйствующую лѣвой и правой части арки на составляющія, ей параллельныя и проходящія черезъ соотвѣтствующую опору и шарниръ (черт. 46). Для лѣвой части получимъ составляющія $0m$ и $m3$, а для правой— $3n$ и $n5$.



Затѣмъ сложимъ 2 полученныхъ силы $m3$ и $3n5$ у шарнира C въ одну равнодѣйствующую mn , которую въ свою очередь разложимъ на опорныя составляющія по AC и BC , получимъ величины ихъ равныя mQ и Qn . Теперь остается только сложить, для полученія опорныхъ реакцій, по двѣ составляющихъ; такимъ образомъ, для лѣвой опорной реакціи получимъ изъ двухъ составляющихъ $0m$ и mQ одну равнодѣйствующую Q , слѣдов., опорное сопротивленіе, будучи направлено въ сторону обратную, будетъ $D_1 = Q0$; также получимъ для правой опоры ея реакцію равную $D_2 = 5Q$. Что касается до давленія въ шарнирѣ C , то, такъ какъ въ лѣвой части будутъ находиться въ равновѣсіи силы $R_1 = 03$, $D_1 = Q0$ и искомое сопротивленіе H въ шарнирѣ C , — очевидно, что сопротивленіе шарнира C — $H = 3Q$, а давленіе на него слѣдов. $Q3$. Для правой же части, сопротивленіе шарнира C будетъ $Q3$, а слѣдов. давленіе на него $3Q$. Очевидно, что для равновѣсія три точки A_2 , C и B_2 должны лежать на одной прямой.

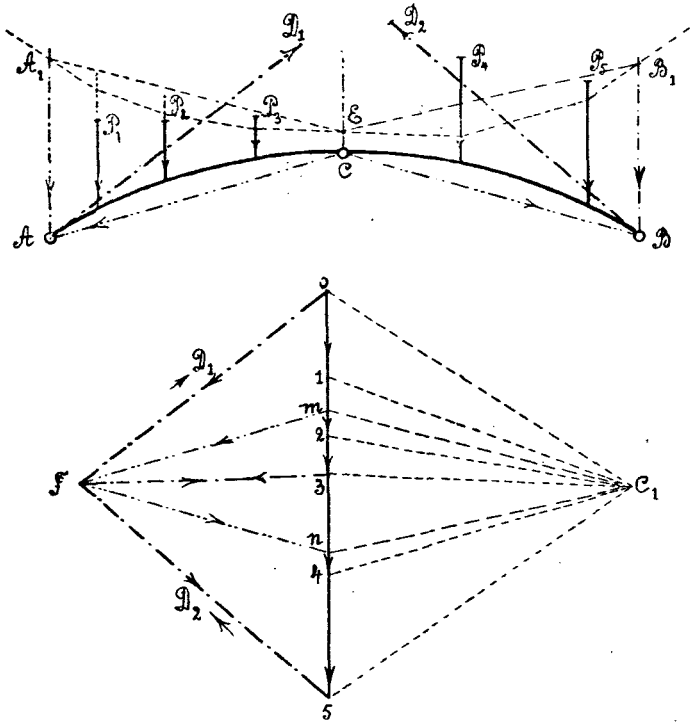


черт. 46.

Въ случаѣ дѣйствія на арку вертикальныхъ силъ, построеніе значительно упрощается выборомъ общаго полюса C_1 (черт. 47). Построивъ веревочный многоугольникъ и проведя черезъ опоры A, B и шарниръ C вертикали, найдемъ точки пересѣченія ихъ съ первымъ лучемъ и послѣднимъ для лѣвой и правой части арки; проведя

затѣмъ замыкающія линіи A_1E и EB_1 , и соотвѣтственно параллельныя имъ лучи mC_1 и nC_1 , получимъ составляющія, равныя

въ опорѣ A — $0m$
 въ опорѣ B — $n5$
 въ шарнирѣ C — $m3 + 3n$.

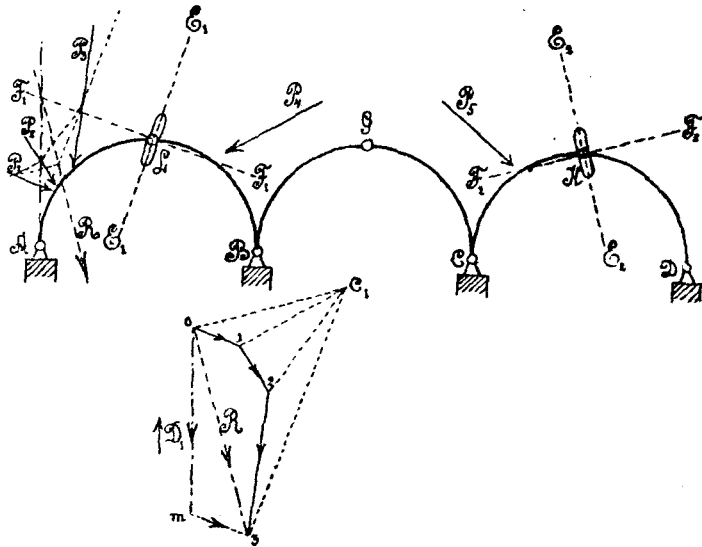


черт. 47.

Разложивъ далѣе силу въ шарнирѣ $m3 + 3n = mn$ на два направлення AC и CB , получимъ величины ихъ, равныя mF и Fn . Теперь остается только сложить двѣ составляющія въ опорѣ A и также въ опорѣ B , тогда получимъ давленія соотвѣтственно $0F$ и $F5$, опорныя же реакціи будутъ: $D_1 = F0$ и $D_2 = 5F$. Давленіе въ шарнирѣ, очевидно, равно $H = \mp F3$.

Разсматривая сложную плоскую систему съ промежуточными подвижными шарнирами (черт. 48), замѣтимъ, что опредѣленіе опорныхъ реакцій не представитъ затрудненій, если имѣть въ виду, что внѣшнія силы, дѣйствующія съ лѣвой стороны подвижнаго промежуточнаго шарнира K , никакого вліянія на опорную реакцію D не имѣютъ. Дѣйствительно, положимъ, что равнодѣйствующая сила съ лѣвой стороны шарнира K будетъ P_5 , а съ правой части никакихъ активныхъ силъ не приложено, давленіе, передаваемое отъ этой равнодѣйствующей на часть KD черезъ шарниръ K , должно проходить по направленію линіи $F_2 F_2$, перпендикулярной къ линіи скольженія $E_2 E_2$. Съ другой сто-

роны, опорное сопротивление шарнира D должно быть приложено въ центрѣ шарнира D и, такъ какъ это будетъ единственная сила съ правой стороны шарнира K , то часть KD должна находиться въ равновѣсїи подѣ дѣйствіемъ давленія на шарнирѣ K по линїи F_1F_2 и опорной реакціи по направленію линїи DK .



черт. 48.

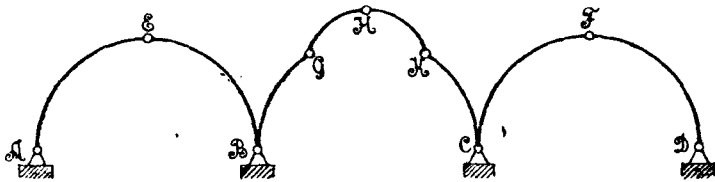
Очевидно, что для равновѣсїи необходимо, чтобы направленіе F_2F_2 совпало съ направленіемъ DK ; если же этого нѣтъ, то необходимо, чтобы обѣ эти силы были порознь равны нулю. Въ нашемъ случаѣ линія F_2F_2 не проходитъ черезъ шарнирѣ D , а потому часть DK никакого участія въ передачѣ опорѣ D дѣйствія силъ, приложенныхъ къ другимъ частямъ системы, не имѣетъ.

Если же силы будутъ дѣйствовать на часть AL между опорой A и промежуточнымъ подвижнымъ шарниромъ, то опорное сопротивление въ A и давленіе въ шарнирѣ L опредѣлится, какъ для балки на двухъ опорахъ, изъ которыхъ одна неподвижная, а другая подвижная, что и исполнено на чертежѣ. Ясно одно, что нельзя направлять въ шарнирѣ L линію скольженія E_1, E_2 перпендикулярно къ AL , т. к. тогда разложеніе силы R на двѣ составляющія, направленные по одной линіи, невозможно. Въ этомъ случаѣ, очевидно, опредѣлитель уравненія равенъ нулю.

Опредѣленіе опорныхъ сопротивленій B и C производится далѣе, какъ для трехшарнирной арки, у которой къ числу активныхъ силъ надо будетъ отнести и найденное давленіе въ шарнирѣ L , выраженное по величинѣ и направленію линіей mz .

Кромѣ только что изложеннаго случая, мы видѣли ранѣе, что опредѣленіе опорныхъ сопротивленій для многопролетной шарнирной балки сводится къ опредѣленію таковыхъ для простыхъ системъ (черт. 44a и 44b).

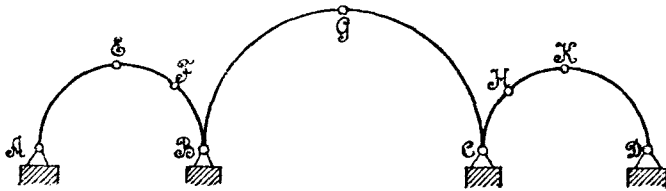
И вообще, определение опорных реакций для сложных плоских систем может быть всегда сведено к определению реакций трехшарнирных арок, балок на двух опорах, простых или со сдвигающимися концами. Такъ, напримеръ, для определения опорных реакций системы, изображенной на чертежѣ 49, сперва разсмотримъ



черт. 49.

рассмотримъ часть GHK , какъ трехшарнирную арку, определивъ для которой давления въ ея опорахъ G и K , примемъ ихъ, какъ внѣшнія силы для частей AEB и CFD , которыя будемъ въ свою очередь разсматривать, какъ трехшарнирныя арки.

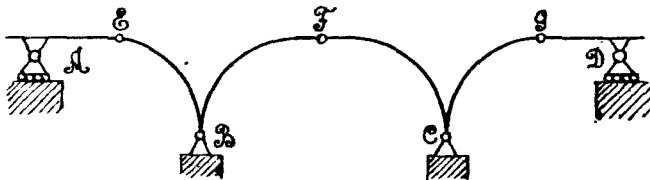
Для системы, изображенной на чертежѣ 50, будемъ сперва разсматривать боковыя части AEF и HKD , какъ трехшарнирныя арки, и



черт. 50.

найдя давления въ шарнирахъ F и H , примемъ ихъ, какъ внѣшнія силы для трехшарнирной арки BGC .

Для системы, изображенной на чертежѣ 51, сперва найдемъ опорныя давления частей AE и GD , какъ для балокъ на двухъ опо-



черт. 51.

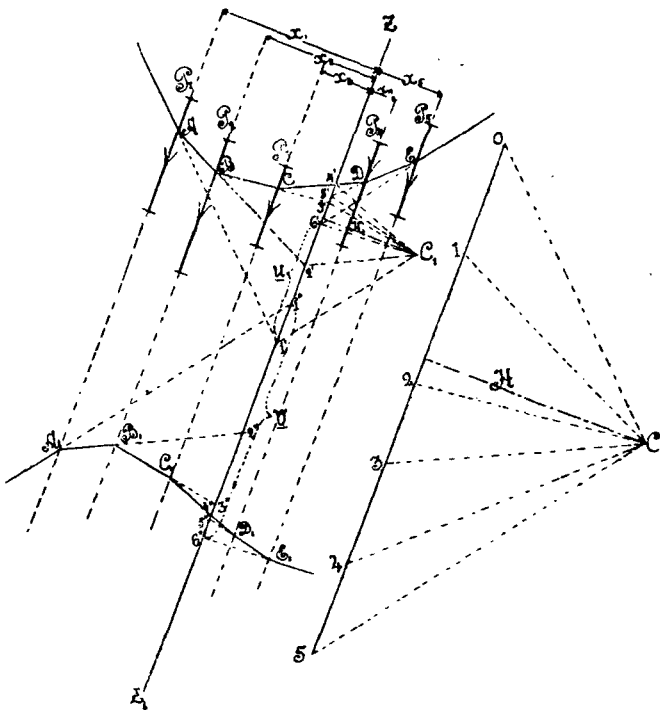
рахъ, изъ которыхъ одна подвижная, а другая неподвижная, и принимая давления въ E и G , какъ внѣшнія силы, будемъ разсматривать часть BFC , какъ трехшарнирную арку.

Такимъ образомъ, въ каждомъ частномъ случаѣ, легко найти опорныя реакции, разбивъ сложную плоскую систему на болѣе простыя.

Г Л А В А 5-ая.

Высшіе моменты параллельныхъ силъ.

24. Опредѣленіе высшихъ моментовъ силъ по способу Кульмана. Если P_1, P_2, P_3, \dots суть параллельныя силы, дѣйствующія въ одной плоскости (черт. 52), а x_1, x_2, x_3, \dots — разстоянія этихъ силъ отъ



черт. 52.

оси ZZ_1 , лежащей въ одной плоскости съ силами и имъ параллельной, то выраженіе:

$$P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + P_3 x_3^n + \dots = \Sigma P x^n$$

называется моментомъ n -го порядка дѣйствующихъ силъ. Въ частномъ случаѣ, когда $n=1$, моментъ будетъ статическій; если же $n=2$, то такой моментъ носитъ названіе момента инерціи и изображается буквою I (moment Inertie). Очевидно, что n -ый моментъ для какой нибудь силы $P x^n$ можно получить, какъ статическій моментъ силы, величина которой $P x^{n-1}$, а разстояніе до оси ZZ_1 равно x . Такимъ образомъ, чтобы найти величину $\Sigma P x^n$, мы будемъ находить по порядку статическіе моменты

$$\Sigma P x, \Sigma (P x) \cdot x, \Sigma (P x^2) \cdot x \dots \Sigma (P x^{n-1}) \cdot x.$$

Для полученія графически этихъ величинъ, построивъ, для данныхъ силъ, многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ, про-

должимъ лучи послѣдняго до пересѣченія съ осью ZZ_1 . Получимъ рядъ треугольниковъ: $A1'2'$, $B2'3'$, $C3'4'$, которые будутъ соотвѣтственно подобны треугольникамъ: $C01$, $C12$, $C23$ во многоугольничкѣ силъ. Изъ подобія ихъ мы можемъ написать:

$$\begin{aligned} 1'2' : x_1 &= P_1 : H. & 1'2' \cdot H &= P_1 \cdot x_1 \\ 2'3' : x_2 &= P_2 : H. & \text{или} & \quad 2'3' \cdot H = P_2 \cdot x_2 \\ 3'4' : x_3 &= P_3 : H. & & \quad 3'4' \cdot H = P_3 \cdot x_3 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 5'6' : x_5 &= P_5 : H. & & \quad 5'6' \cdot H = P_5 \cdot x_5. \end{aligned}$$

Сложивъ эти равенства, получимъ:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots = \Sigma Px = H (1'2' + 2'3' + 3'4' + \dots)$$

Въ полученномъ равенствѣ надо обратить вниманіе на знаки отрѣзковъ $1'2'$, $2'3'$ и т. д. Знаки ихъ будутъ зависѣть отъ знаковъ x_1 , x_2 , x_3 Въ самомъ дѣлѣ, находя изъ выраженія

$$\begin{aligned} 1'2' : x_1 &= P_1 : H \\ \text{величину } 1'2' &= \frac{P_1x_1}{H}, \end{aligned}$$

видимъ, что знакъ у $1'2'$ зависитъ отъ знака при x_1 , т. к. величины P_1 и H остаются всегда одного знака. Въ нашемъ примѣрѣ первые три отрѣзка имѣютъ знаки обратные послѣднимъ двумъ отрѣзкамъ, поэтому взявъ геометрическую сумму отрѣзковъ, получимъ отрѣзокъ $1'6'$, знакъ котораго будетъ зависѣть отъ того, какую сторону относительно взятой оси ZZ_1 будемъ считать положительною, какую отрицательной. Окончательно получимъ

$$M = \Sigma Px = H \cdot n,$$

гдѣ n геометрическая сумма отрѣзковъ.

Разсматривая далѣе отрѣзки $1'2'$, $2'3'$ и т. д. какъ силы, дѣйствующія по направленіямъ силъ P_1 , P_2 , P_3, мы для нихъ въ свою очередь можемъ найти статическій моментъ.

Многоугольникъ силъ у насъ уже есть $1'2'3'4'5'6'$, поэтому, выбравъ произвольный полюсъ C_1 и проведя лучи, строимъ веревочный многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1$ и продолжаемъ лучи, его до пересѣченія съ осью ZZ_1 . Изъ подобія треугольниковъ $1''2''A_1$ и $1'2'C_1$ получимъ:

$$\begin{aligned} x_1 : 1''2'' &= H_1 : 1'2' & \text{или} & \quad x_1 \cdot 1'2' = H_1 \cdot 1''2'' \\ x_2 : 2''3'' &= H_1 : 2'3' & & \quad x_2 \cdot 2'3' = H_1 \cdot 2''3'' \\ \dots & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Т. к. раньше мы нашли, что $1'2' = \frac{P_1x_1}{H}$, то, подставляя въ наши равенства, получимъ:

$$\begin{aligned} P_1x_1^2 &= 1''2'' \cdot H \cdot H_1 \\ P_2x_2^2 &= 2''3'' \cdot H \cdot H_1 \\ P_3x_3^2 &= 3''4'' \cdot H \cdot H_1 \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Взявъ сумму лѣвыхъ и правыхъ частей равенствъ, получимъ:

$$\Sigma P x^2 = I = H \cdot H_1 (1''2'' + 2''3'' + 3''4'' + \dots),$$

или, обозначая геометрическую сумму отрезковъ черезъ V , можемъ написать:

$$I = H \cdot H_1 \cdot v,$$

гдѣ V представляетъ собою отрезокъ, который дѣлають на оси крайніе лучи веревочнаго многоугольника.

Если отрезокъ H мѣрится по масштабу силъ, то отрезки H_1 и v надо мѣрить по масштабу разстояній.

Если бы намъ нужно было найти моментъ силъ 3-ьяго порядка $\Sigma P x^3$, то мы приняли бы отрезки. $1''2''$, $2''3''$ и т. д. за силы, приложили бы ихъ по направленіямъ силъ P_1, P_2, \dots и, произведя предыдущія построения, нашли бы отрезки $1'''2'''$, $2'''3'''$ и т. д., суммируя которые получили бы

$$\Sigma P x^3 = H \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot \omega.$$

Ясно, что для нахождения момента n -аго порядка потребуется выстроить n -веревочныхъ многоугольниковъ.

21. Опредѣленіе момента инерціи силъ по способу Моора. Опредѣляя площадь фигуры, образуемой сторонами веревочнаго многоугольника, осью ZZ_1 и продолженными крайними лучами (черт. 52), т. е. площадь $ABCDEb'1'$, видимъ, что она равна:

$$F = \text{пл. } \triangle A1'2' + \text{пл. } \triangle B2'3' + \dots,$$

$$\text{или } F = \frac{1}{2} (x_1 \cdot 1'2' + x_2 \cdot 2'3' + \dots).$$

Подставляя вмѣсто $1'2'$ найденныя для нихъ значенія, т. е.

$$1'2' = \frac{x_1 P_1}{H},$$

получимъ:

$$F = \frac{1}{2H} (P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \dots) = \frac{1}{2H} \Sigma P x^2,$$

слѣдовательно, окончательно

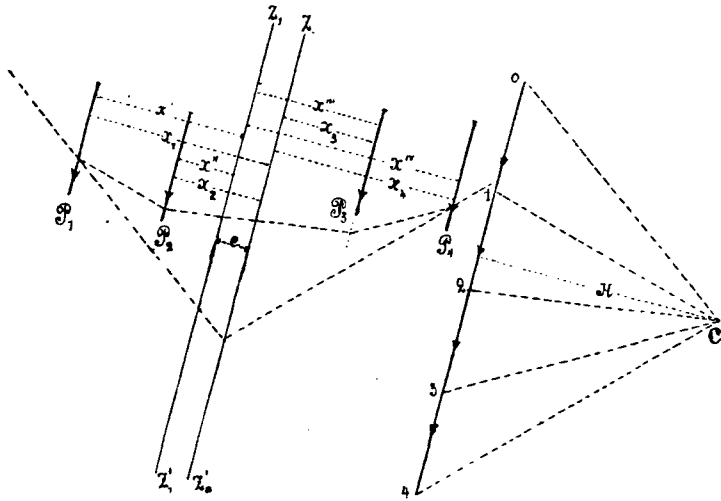
$$\Sigma P x^2 = I = 2FH,$$

т. е. моментъ инерціи силъ равенъ удвоенной площади вышеуказанной фигуры, умноженной на полное разстояніе.

25. Зависимость между моментами инерціи относительно параллельныхъ осей. Построимъ для системы данныхъ параллельныхъ силъ многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ (черт. 53); проведемъ дагѣ черезъ точку пересѣченія крайнихъ лучей оси $Z_0Z'_0$ и

вторую ось $Z_1Z'_1$ ей параллельную на разстояніи e отъ нея. Обозначая разстояніе отъ силъ до оси $Z_0Z'_0$ черезъ x_1, x_2, x_3, \dots , а до оси $Z_1Z'_1$ черезъ $x', x'', x''' \dots$ видимъ, что

$$x' = x_1 \pm e \dots \dots (a).$$



черт. 53.

Моментъ инерціи относительно оси $Z_1Z'_1$ выражается $I = \Sigma P x'^2$, подставляя сюда вмѣсто x' , найденное для него значеніе (a), получимъ:

$$I = \Sigma P x'^2 = \Sigma P x_1^2 \pm 2 \Sigma P x_1 e + e^2 \Sigma P,$$

но въ этомъ выраженіи $\Sigma P x_1$ есть статическій моментъ силъ относительно оси $Z_0Z'_0$, который равенъ нулю, т. к. отръзокъ на оси дѣлаемый крайними лучами веревочнаго многоугольника, равенъ нулю; а потому получимъ окончательно:

$$I = \Sigma P x_1^2 + e^2 \Sigma P = I_0 + e^2 \Sigma P,$$

т. е., моментъ инерціи силъ относительно какой угодно оси, параллельной силамъ, равенъ моменту инерціи относительно оси, направленіе которой совпадаетъ съ равнодѣйствующей, сложенной съ суммою силъ, умноженной на квадратъ разстоянія между осями.

Г Л А В А 6-ая

Статическіе моменты площадей.

26. Графическій способъ опредѣленія статическаго момента площадей. Статическимъ моментомъ площади, относительно нѣкоторой оси, на-

зывается произведение площади на расстояние ее центра тяжести до выбранной оси. Для того, чтобы пользоваться уже известным намъ изъ главы 2-ой способомъ опредѣленія момента силъ относительно оси, разбиваемъ данную площадь прямыми, параллельными оси, на отдѣльныя полоски (черт. 54). Принимаемъ площадки послѣднихъ какъ силы, приложенныя въ центрѣ тяжести полосокъ и, на основаніи способа отысканія статическаго момента силъ, строимъ многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ. Найдя пересѣченіе крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника съ осью 00 , т. е. точки a и b , получимъ отрѣзокъ ab , пропорціональный статическому моменту, а самый моментъ будетъ

$$M = ab.H.$$

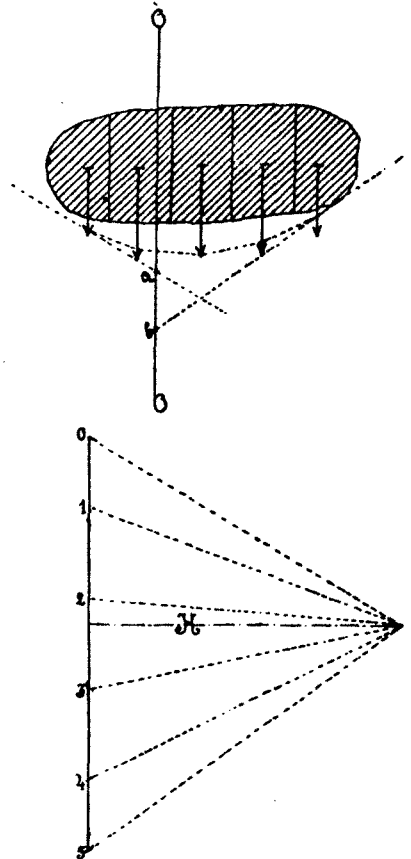
Очевидно, что, если въ многоугольникъ силъ отложить, вмѣсто величинъ площадокъ, сумму ихъ оснований,—что можно сдѣлать, проведя параллельныя линіи въ площади на одинаковыхъ другъ отъ друга расстояніяхъ и принимая площадки за трапеціи,—то окончательно получимъ, умножая результатъ на $\frac{h}{2}$, что:

$$M = ab \cdot \frac{h}{2} \cdot H,$$

гдѣ, слѣдов., h —высота трапеціи.

Замѣтимъ, что въ томъ случаѣ, когда ось, относительно которой мы опредѣляемъ моментъ, проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія, то $M = H \cdot 0 = 0$, такъ какъ дѣвья площадки дадутъ на оси отрѣзки, направленные снизу вверхъ, правыя же—сверху внизъ, въ суммѣ равныя первымъ, почему геометрическая сумма всѣхъ площадокъ будетъ равна нулю. Обратное заключеніе также справедливо, т. е., если статическій моментъ относительно нѣкоторой оси равенъ нулю, то ось проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія.

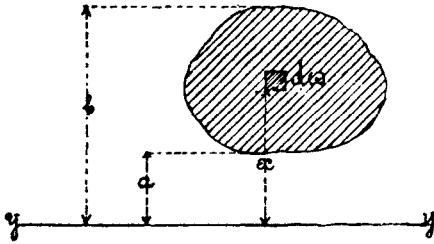
27. Аналитическій способъ опредѣленія статическаго момента площадей. Въ частномъ случаѣ, если центръ тяжести данной площади известенъ или легко опредѣлимъ, то статическій моментъ будетъ равенъ произведенію площади на расстояние ее центра тяжести до данной оси. Въ противномъ же случаѣ примѣняется слѣдующій общій методъ: на данной площади выбираютъ, въ зависимости отъ способа образованія площади, безконечно малый элементъ $d\omega$ (черт. 55), расположенный на произвольномъ разстояніи x отъ оси; тогда стати-



черт. 54.

ческой моментъ этой элементарной площадки относительно оси yy равенъ $d\omega \cdot x$ (точнѣе, нужно было бы взять произведение $d\omega$ на разстояніе центра тяжести элемента до названной оси, но разница между этимъ разстояніемъ и принятымъ величиною безконечно малая, которой можно пренебречь).

Для получения статическаго момента всей площади надо взять сумму вышенайденныхъ элементарныхъ моментовъ, т. е.:



черт. 55.

$$(A) \quad M = \int_a^b d\omega \cdot x,$$

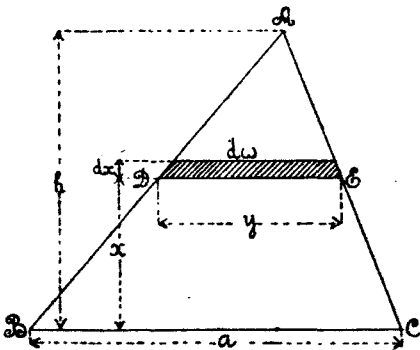
гдѣ интегралъ берется въ предѣлахъ между крайними элементами.

Если данная площадь можетъ быть разбита на отдѣльныя площадки, центры тяжести которыхъ извѣстны, то въ такомъ случаѣ лучше примѣнять слѣдующее уравненіе, написанное на основаніи той теоремы, что статическій моментъ суммы равенъ суммѣ статическихъ моментовъ, т. е.:

(B) $M = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \dots = \Sigma \omega x$, гдѣ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ отдѣльныя площади, а x_1, x_2, x_3, \dots — разстоянія ихъ центровъ тяжести до оси. Способъ опредѣленія статическаго момента площади графическимъ или аналитическимъ путемъ зависитъ пѣшкомъ отъ вида самой площади. Такъ, напримѣръ, если площадь неправильной формы, то опредѣленіе статическаго момента приходится дѣлать графически въ виду того, что рѣшеніе интеграла можетъ быть очень трудное. Для площадей же простыхъ предпочтительнѣе аналитическій способъ, каковой можетъ быть доведенъ до большой простоты, если центръ тяжести площади извѣстенъ; даже и въ томъ случаѣ, когда центръ тяжести всей площади неизвѣстенъ, а извѣстны лишь центры тяжести составныхъ частей, вопросъ опредѣленія статическаго момента сводится къ простому суммированію произведеній изъ каждой отдѣльной площади на разстояніе ея центра тяжести до оси, т. е. на основаніи уравненія B. Покажемъ на примѣрахъ аналитическій способъ опредѣленія статическаго момента площадей.

28. Статическій моментъ площади треугольника относительно одной

изъ его сторонъ. Положимъ, что желаемъ опредѣлить статическій моментъ площади треугольника ABC (черт. 56) относительно его основанія BC . Примѣняя общее уравненіе



черт. 56.

$$M = \int_a^b x d\omega,$$

выдѣляемъ въ треугольникѣ двумя линиями, параллельными основанію BC , которое принято нами за ось, площадку $d\omega$, шириною y и высотой dx ; такъ какъ dx величина безконечно малая, то можемъ принять,

что выдѣленная элементарная площадка есть параллелограмъ, площадь котораго, слѣдов., равна

$$d\omega = y \cdot dx.$$

Поэтому элементарный статическій моментъ выражается:

$$dM = d\omega \cdot x = y \cdot dx,$$

полный же статическій моментъ будетъ:

$$M = \int x \cdot y \cdot dx,$$

гдѣ предѣлы интеграла еще не поставлены въ виду того, что подъ интеграломъ получились двѣ переменныя величины, и мы пока не знаемъ, будутъ ли обѣ независимыя переменныя или же одна будетъ функцией другой.

Изъ подобія треугольниковъ ABC и ADE имѣемъ:

$$y : a = h - x : h, \text{ откуда}$$

$$y = \frac{a(h-x)}{h}$$

Такимъ образомъ, видимъ, что y есть функция отъ x , а потому, подставляя вмѣсто y въ вышеприведенную формулу найденное значеніе, можемъ поставить предѣлы интеграла въ зависимости отъ x , т. е.:

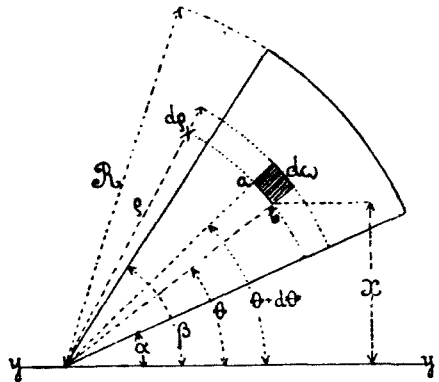
$$M = \int_0^h x \cdot \frac{a(h-x)}{h} \cdot dx$$

и рѣшая интегралъ, получимъ:

$$M = \frac{ah^2}{6} = \omega \cdot \frac{h}{3}$$

29. Статическій моментъ сектора относительно оси, проходящей черезъ центръ круга. Дано α, β и R (черт. 57), требуется найти стат. моментъ сектора относительно оси yy . Выдѣлимъ элементарную площадку $d\omega$, сообразно способу образования сектора, т. е., проведемъ два радіуса, одинъ подъ угломъ θ къ оси, другой подъ угломъ $\theta + d\theta$, и пересѣчемъ ихъ двумя дугами радіусовъ ρ и $\rho + d\rho$; заштрихованная часть и будетъ выдѣленной элементарной площадкой $d\omega$. Элементарный статическій моментъ относительно оси yy будетъ

$$dM = d\omega \cdot x,$$



черт. 57.

$$\text{но } d\omega = d\rho \cdot ab = d\rho \cdot \rho \cdot d\theta$$

$$x = \rho. \operatorname{Sn} \theta.$$

Подставляя эти значенія, получимъ

$$dM = \rho^2. d\rho. \operatorname{Sn} \theta. d\theta.$$

Въ первой части двѣ переменныя независимыя ρ и θ , поэтому для получения полнаго статическаго момента надо взять интеграль двойной, каждый съ предѣлами согласно измѣненія для сектора величинъ ρ и θ , т. е.:

$$M = \int_0^R \int_\alpha^\beta \rho^2. d\rho. \operatorname{Sn} \theta. d\theta,$$

или

$$M = \int_0^R \rho^2. d\rho \int_\alpha^\beta \operatorname{Sn} \theta. d\theta. \text{ Рѣшая интеграль,}$$

находимъ:

$$M = \frac{R^3}{3} (\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \beta).$$

Въ частномъ случаѣ, если принять, что: $\alpha + \beta = 180^\circ$,

$$\beta - \alpha = \gamma,$$

т. е., если стороны сектора составляютъ съ осью yy равные углы, то, замѣчая предварительно, что:

$$\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Cos} \beta = 2 \operatorname{Sn} \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{Sn} \frac{\beta - \alpha}{2},$$

получимъ:

$$M = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{Sn} \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{Sn} \frac{\beta - \alpha}{2},$$

или, подставляя вмѣсто

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = 90^\circ,$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\gamma}{2},$$

получимъ окончательно:

$$M = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{Sn} \frac{\gamma}{2}$$

Въ заключеніе замѣтимъ, что опредѣленіе статическихъ моментовъ находитъ себѣ, главнымъ образомъ, примѣненіе при опредѣленіи центровъ тяжести площадей, къ каковому теперь и перейдемъ.

ГЛАВА 7-ая.

Опредѣленіе центра тяжести площадей.

Аналитическій способъ опредѣленія центра тяжести. Опредѣленіе это производится на основаніи слѣдующаго уравненія:

$$M = \omega \cdot a,$$

$$\text{откуда } a = \frac{M}{\omega}.$$

Слѣдовательно, частное отъ дѣленія статическаго момента площади относительно нѣкоторой оси на самую площадь ω даетъ разстояние отъ оси до центра тяжести.

Взявъ другую ось, не параллельную лишь первой, и произведемъ для нея тѣже опредѣленія, получимъ въ результатѣ другое разстояние b до новой оси. Проведя на разстояннхъ a и b отъ соотвѣтствующихъ осей линнн параллельныя, получимъ точку пересѣченія, которая и будетъ центромъ тяжести площади.

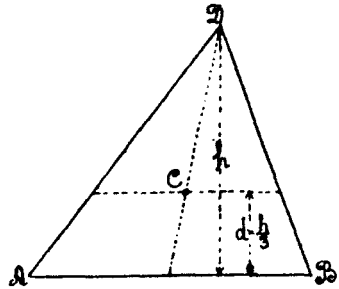
Въ практикѣ употребляются, большею частью, такія тѣла, площади поперечныхъ сѣченій которыхъ имѣютъ хоть одну ось симметріи; тогда, очевидно, достаточно найти только одно разстояние центра тяжести до нѣкоторой оси, которая, конечно, не должно быть параллельна оси симметріи.

Примѣняя указанный способъ къ отысканію центра тяжести, напр., треугольника, знаемъ, что его статическій моментъ относительно основанія AB (черт. 58) будетъ

$$M = \omega \cdot \frac{h}{3} \quad (\text{см. } n^{\circ} 28).$$

Такъ какъ треугольникъ имѣетъ оси симметріи, то, проведя одну изъ нихъ, а именно, дѣлящую сторону AB пополамъ, найдемъ, что центръ тяжести будетъ находиться на ней; съ другой стороны разстояние его отъ стороны AB , которую мы приняли за ось, будетъ:

$$d = \frac{M}{\omega} = \frac{\omega \cdot h}{3 \cdot \omega} = \frac{h}{3}.$$



черт. 58.

Опредѣлимъ также центръ тяжести для сектора, стороны котораго образуютъ равные углы съ осью, проходящей черезъ центръ тяжести.

$$\text{Площадь сектора } \omega = \frac{\gamma R^2}{2},$$

$$\text{Статическій моментъ } M = \frac{2}{3} R^3 \text{Sn } \frac{\gamma}{2}.$$

Слѣдовательно, разстояние отъ оси до центра тяжести будетъ

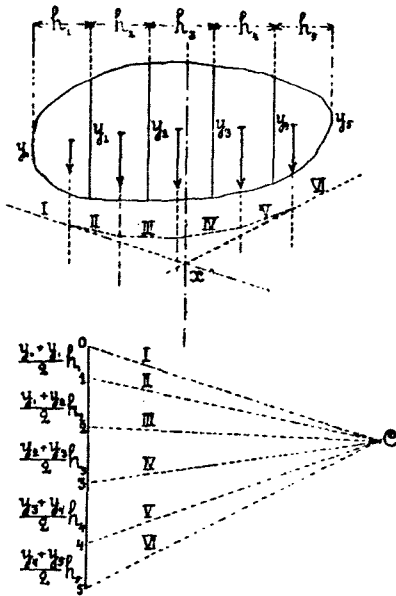
$$d = \frac{M}{\omega} = \frac{4}{3} \frac{R \text{Sn } \frac{\gamma}{2}}{\gamma}, \text{ и, кромѣ того, центръ тяжести лежитъ на оси симметріи.}$$

Если, наконецъ, въ общемъ случаѣ, величина M и ω не опредѣлены, то разстояние центра тяжести до оси опредѣляется изъ уравненія общаго вида

$$x = \frac{\int_a^b x \cdot d\omega}{\int_a^b d\omega}$$

31. Графическій способъ опредѣленія центра тяжести площади.

Центръ тяжести всякой площади можно разсматривать, какъ точку, лежащую на направленіи равнодѣйствующей вѣса *) данной площади; поэтому опредѣленіе его, въ общемъ случаѣ, производимъ слѣдующимъ образомъ. Разбиваемъ данную площадь (черт. 59) параллельными линиями на возможно большее число частей, разсматриваемъ каждую такую площадку какъ трапецію, и, при небольшой величинѣ площадекъ, назначаемъ ихъ центры тяжести на глазъ.



черт. 59.

точно сдѣлать лишь одно построеніе, разбивъ площадь линіями не параллельными оси симметріи.

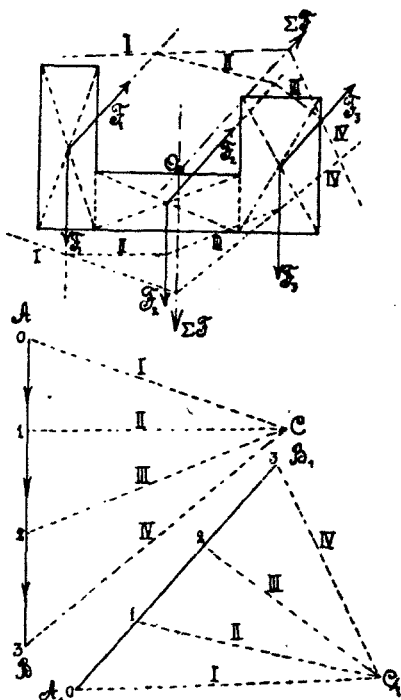
Для облегченія построенія лучше производить дѣленіе площади параллельными линіями, отстоящими другъ отъ друга на равныхъ разстояніяхъ и, кромѣ того, нѣтъ надобности проводить линіи параллельно направленію вѣса, такъ какъ мы всегда можемъ повернуть построеніе на какой угодно уголъ.

32. Опредѣленіе центра тяжести площади, центры тяжести составныхъ частей которой известны. Чтобы опредѣлить графически центръ тяжести фигуры, изображенной на чертежѣ 60, найдемъ предварительно центры тяжести отдѣльныхъ частей, которые легко опредѣлятся, какъ лежащія на пересѣченіи діагоналей 3-хъ прямоугольни-

*) Хотя площадь есть величина неизмѣнная, но мы будемъ подразумевать подъ словомъ вѣсъ площади линію выражающую въ линейныхъ единицахъ содержаніе квадратныхъ единицъ площади.

ковъ, на каковыя мы разбиваемъ нашу площадь. Примемъ далѣе, что площадь каждаго изъ прямоугольниковъ соответственно равна F_1, F_2, F_3 и выражена отрезками прямой, которые примемъ за силы, дѣйствующія сперва въ направленіи параллельномъ AB , а затѣмъ по направленіи параллельному A_1B_1 . Опредѣливъ для этихъ обоихъ случаевъ положеніе 2-хъ равнодѣйствующихъ ΣF , найдемъ точку ихъ взаимнаго пересѣченія O , представляющую искомый центръ тяжести.

Вмѣсто отрезковъ F_1, F_2 и F_3 , содержащихъ столько линейныхъ единицъ, сколько каждая соответствующая площадь содержитъ квадратныхъ единицъ, можно откладывать по тѣмъ же направленіямъ отрезки, равные высотамъ прямоугольниковъ, равновеликихъ даннымъ и имѣющихъ одно общее основаніе; вообще, результатъ не измѣнится, если вмѣсто площадей прямоугольниковъ будемъ откладывать по направленіямъ F_1, F_2 и F_3 , величины имъ пропорціональныя.



черт. 60.

ГЛАВА 8-ая.

Опредѣленіе моментовъ второго порядка площадей.

33. Общія понятія. Теорія моментовъ второго порядка, изложенная нами выше, находитъ, главнымъ образомъ, примѣненіе при расчетѣ изгибаемыхъ балокъ. Если отнесемъ площадь поперечнаго сѣченія такой балки къ двумъ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ и обозначимъ черезъ $d\omega$ бесконечно малую площадку этого сѣченія, а черезъ x и y разстоянія ея до осей координатъ, то произведенія $d\omega \cdot x^2$ или $d\omega \cdot y^2$ называются элементарными моментами инерціи относительно осей y или x ; суммы же такихъ элементарныхъ моментовъ инерціи, взятыхъ въ извѣстныхъ предѣлахъ, представляютъ намъ моменты инерціи всей площади относительно тѣхъ же осей, т. к.:

$$I_x = \int y^2 \cdot d\omega \text{ — мом. инерціи площади относит. оси } x.$$

$$I_y = \int x^2 \cdot d\omega \text{ } y,$$

гдѣ интегралы должны быть распространены на всю площадь.

Кромѣ вышеуказанныхъ произведеній элементарной площади на квадратъ разстоянія ея до оси, можно составить еще произведеніе,

измѣреніе котораго будетъ одинаково съ прежними, а именно: $d\omega \cdot x \cdot y$.

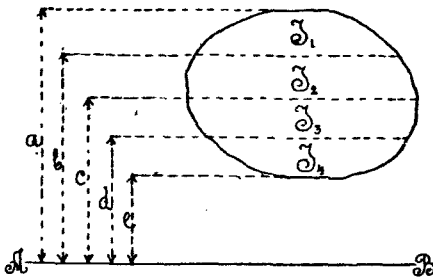
Такое произведение называется элементарнымъ *произведениемъ инерции*, а сумма элементарныхъ даетъ полное произведение инерции (или центробѣжнаго момента), т. е.

$$Z_{xy} = \int d\omega \cdot x \cdot y. \text{ — произведение инерции площади относит. осей } x \text{ и } y.$$

Напряженіе при изгибѣ есть нѣкоторая функція отъ этихъ трехъ интеграловъ, а потому необходимо всесторонне изучить эти послѣдніе. Предварительно рассмотримъ нѣсколько относящихся сюда теоремъ.

34. Зависимость между моментомъ инерции всей площади и моментами инерции составляющихъ площадей. Разобьемъ данную площадь (черт. 61) линиями, параллельными оси AB , на нѣсколько частей и положимъ, что моментъ инерции каждой полученной такимъ образомъ площадки равенъ соответственно:

$$I_1 = \int_b^a x^2 d\omega, \quad I_2 = \int_c^b x^2 d\omega, \quad I_3 = \int_d^c x^2 d\omega, \quad I_4 = \int_0^d x^2 d\omega.$$



черт. 61.

или

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \text{ т. е.}$$

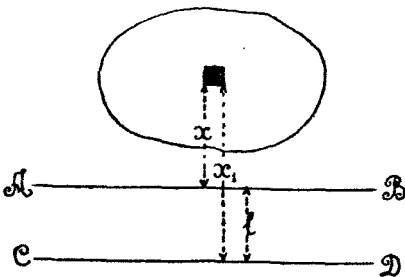
моментъ инерции всего сѣченія равенъ суммѣ моментовъ инерции составляющихъ площадей.

35. Зависимость между моментами инерции площадей относительно двухъ параллельныхъ осей. Выберемъ на данной площади элементъ $d\omega$ (черт. 62) и назовемъ разстояніе его до осей AB и CD соответственно черезъ x и x_1 , тогда моментъ инерции всей площади x относительно оси CD будетъ:

$$I_{cd} = \int x_1^2 \cdot d\omega$$

но $x_1 = x + l$, подставляя, имѣемъ

$$I_{cd} = \int (x + l)^2 d\omega \text{ и}$$



черт. 62.

$$I_{cd} = \int x^2. d\omega + \int l^2. d\omega + \int 2l. x. d\omega$$

$$I_{cd} = \int x^2. d\omega + l^2. \int d\omega + 2l. \int x. d\omega.$$

Здѣсь $\int x^2. d\omega$ означаетъ моментъ инерціи относительно оси AB , $\int d\omega$ — площадь всего сѣченія и $\int x. d\omega$ — статическій моментъ площади относительно оси AB , т. е.:

$$\int x^2. d\omega = I_{ab}.$$

$$l^2. \int d\omega = l^2. \omega$$

$$2l. \int x. d\omega = 2l. M_{ab}.$$

Подставляя эти значенія, найдемъ

$$I_{cd} = I_{ab} + l^2 \omega + 2l. M_{ab}.$$

т. е. моментъ инерціи площади относительно нѣкоторой оси равенъ моменту инерціи относительно оси ей параллельной, сложенному съ произведеніемъ площади на квадратъ разстоянія между осями и съ произведеніемъ статическаго момента, относительно первой оси, на удвоенное разстояніе между осями.

Въ частномъ случаѣ, наиболѣе встрѣчающемся въ практикѣ, если ось AB проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія, то $M_{ab} = 0$, и тогда предыдущее равенство обратится въ слѣдующее:

$$I_{cd} = I_{ab} + l^2. \omega.$$

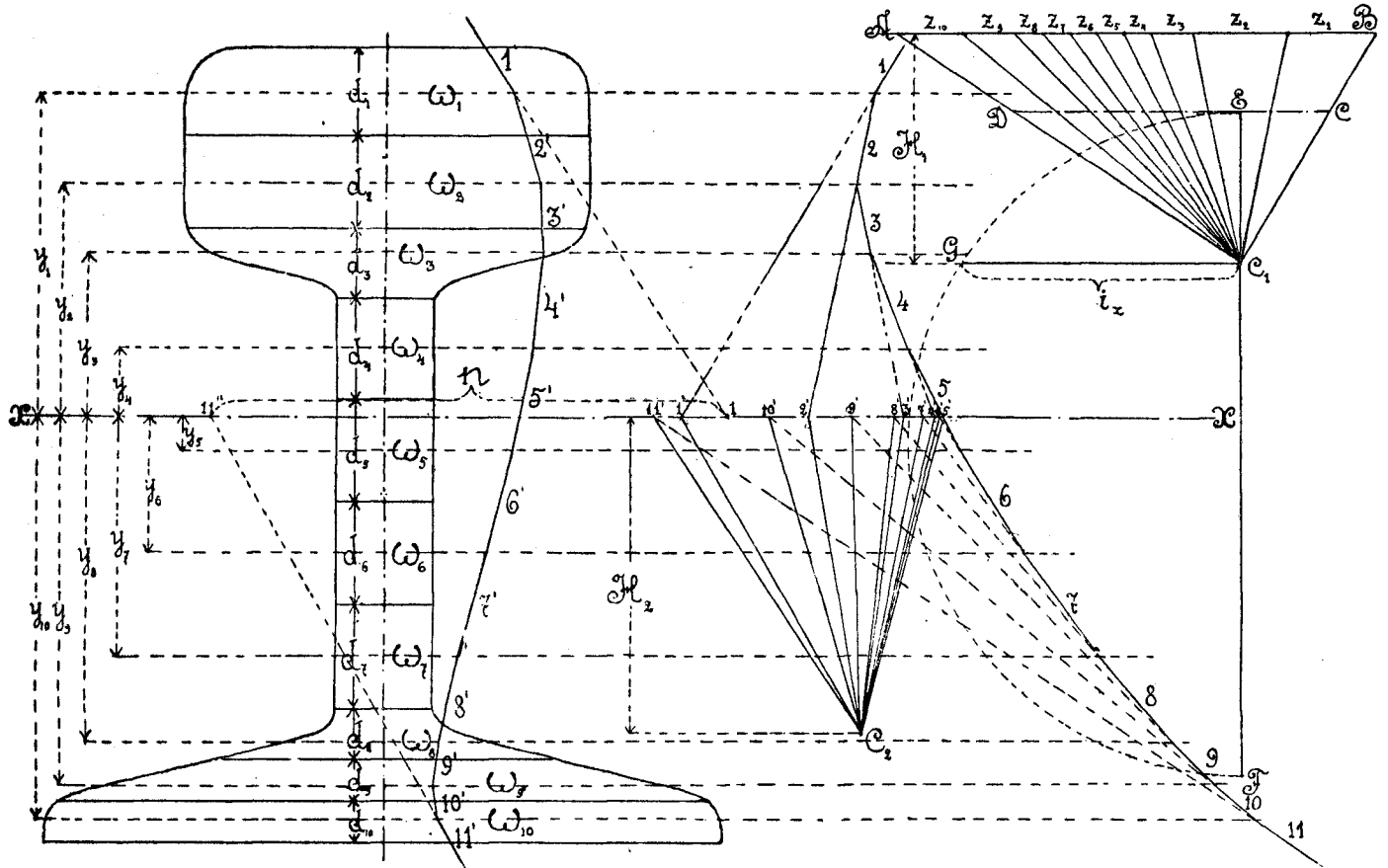
36. Графическій способъ Кульмана опредѣленія момента инерціи площадей. Въ н^о 24 былъ указанъ способъ Кульмана для нахождения моментовъ инерціи силъ относительно данной оси. При опредѣленіи момента инерціи площади будемъ держаться того-же построенія, а потому разобьемъ данную площадь (черт. 63) на отдѣльныя площадки линиями параллельными оси xx и примемъ вѣсъ каждой такой площадки сосредоточеннымъ въ ея центрѣ тяжести.

Называя, далѣе, черезъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ площади этихъ полосокъ, а черезъ y_1, y_2, y_3, \dots — разстоянія ихъ центровъ тяжестей до оси xx , можемъ написать, что

$$I_x = \omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \omega_3 y_3^2 + \dots = \Sigma \omega y^2 \dots (1)$$

Обратимъ полоски въ равновеликіе имъ прямоугольники, имѣющіе общее основаніе a , тогда, называя высоты прямоугольниковъ соотвѣтственно черезъ z_1, z_2, z_3, \dots , имѣемъ:

$$\omega_1 = az_1, \omega_2 = az_2, \omega_3 = az_3, \dots$$



Подставляя эти величины въ уравненіе (1), получимъ

$$I_x = a \Sigma zy^2$$

Если теперь примемъ высоты z_1, z_2, z_3, \dots какъ силы, приложенныя въ центрахъ тяжестей полосокъ параллельно оси xx , то, на основаніи способа построенія, изложеннаго въ n^o 24, обозначая черезъ H_1 полюсное разстояніе перваго многоугольника силъ, H_2 тоже втораго многоугольника силъ и черезъ n длину отръзка, дѣлаемаго на оси xx крайними лучами втораго веревочнаго многоугольника, получимъ, какъ и раньше:

$$\Sigma y^2 z = n \cdot H_1 \cdot H_2, \text{ а отсюда}$$

$$I_x = a \Sigma y^2 z = a \cdot n \cdot H_1 \cdot H_2$$

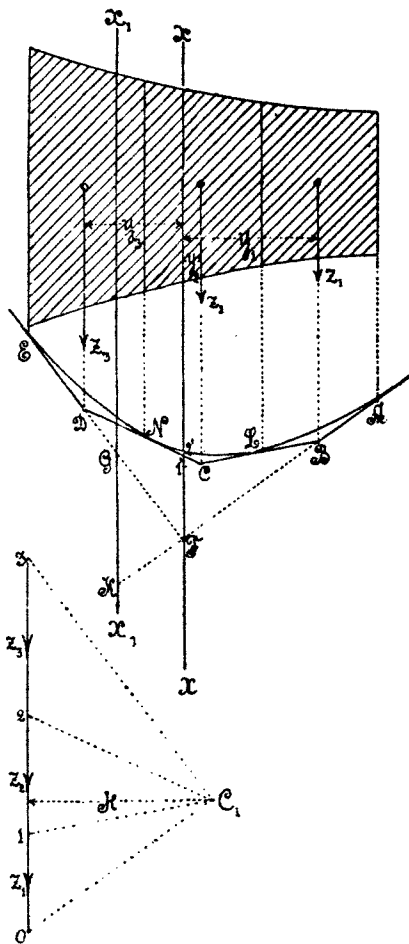
Всѣ величины правой части, очевидно, надо измѣрять по одному масштабу разстояній, причемъ для a , H_1 и H_2 слѣдуетъ выбирать такіе размѣры, чтобы ихъ величины выражались въ круглыхъ числахъ.

37. Графическій способъ Моора для опредѣленія момента инерціи площади относительно оси xx (черт. 64) по способу Моора, разобьемъ также линіями параллельными оси xx сѣченіе на площадки.

Обрашая каждую такую площадку въ прямоугольникъ съ общимъ основаніемъ a , получимъ высоты z_1, z_2, z_3, \dots и принимаемъ эти высоты какъ силы, приложенныя въ центрѣ тяжести площадокъ. Строимъ многоугольникъ силъ и веревочный многоугольникъ.

Тогда площадь, ограниченная сторонами веревочнаго многоугольника, избранной осью *) и продолженными крайними лучами т. е., площадь $BCDF$ будетъ равна

$$F = \text{плоч. } \triangle FB1' + \\ + \text{плоч. } \triangle 1'C2' + \text{плоч. } \triangle 2'DF,$$



черт. 64.

*) Ось xx относительно которой желаемъ опредѣлять I_x , избрана нами, проходящей черезъ центръ тяжести; если пожелаемъ опредѣлить моментъ инерціи относительно другой оси напр. x_1x_1 , то къ площади $BCDF$ нужно придать площадь треугольника GFK .

$$\text{или } F = \frac{1}{2} (F1'.y_1 + 1'2'.y_2 + 2F.y_3)$$

Отрѣзки же, дѣлаемые сторонами веревочнаго многоугольника, какъ извѣстно, пропорціональны статическимъ моментамъ, т. е.:

$$F1' = \frac{z_1 y_1}{H}; 1'2' = \frac{z_2 y_2}{H}; 2'F = \frac{z_3 y_3}{H}.$$

Подставляя эти значенія въ выраженіе для площади F , получимъ:

$$F = \frac{1}{2H} (z_1 y_1^2 + z_2 y_2^2 + z_3 y_3^2)$$

$$\text{или } F = \frac{\Sigma z y^2}{2H}$$

откуда

$$\Sigma z y^2 = 2HF.$$

Умноживъ обѣ части равенства на отброшенное общее для всѣхъ прямоугольниковъ основаніе a получимъ:

$$a \Sigma z y^2 = 2aHF.$$

Лѣвая часть равенствъ есть моментъ инерціи; такъ какъ $a \Sigma z y^2 = \Sigma a z y^2 = \Sigma d\omega.y^2 = I_x$, поэтому

$$I_x = 2aHF$$

т. е. моментъ инерціи пропорціоналенъ площади F , слѣдов., опредѣленіе момента инерціи сводится къ отысканію величины этой площади.

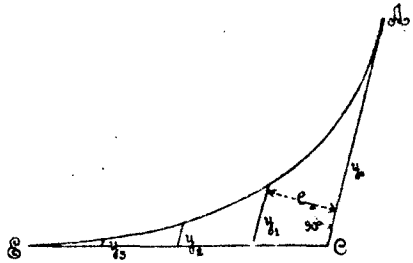
Не трудно видѣть, что при увеличеніи числа полосокъ, на которыя мы разбиваемъ нашу площадь, ломаная линия веревочнаго многоугольника приближается къ кривой, которая, въ нашемъ случаѣ, будетъ касательна къ ломаной въ точкахъ пересѣченія послѣдней съ продолженіями прямыхъ, разбивающихъ площадь на полоски. Поэтому при отысканіи момента инерціи по способу Моора всегда можно видѣть ошибку, которую мы сдѣлали, раздѣливъ данное сѣченіе на конечное число частей; эта ошибка выражается разностью площадей $ALNEF$ и $BCDF$.

Вычисленіе величины площади F можетъ быть произведено болѣе или менѣе точно, смотря по тому, будемъ ли мы опредѣлять площадь ограниченную веревочной кривою или веревочной ломаной линіей. Для вычисленія площади, въ первомъ случаѣ, примѣнимъ формулу Симпсона, которая имѣетъ видъ

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} \left[(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})) + \frac{1}{4}(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right]$$

Для вычисленія по этой формулѣ надо площадь, ограниченную кривою, осью абсциссъ съ двухъ сторонъ и 2-мя ординатами съ двухъ

другихъ сторонъ, раздѣлить на *четное* число площадокъ линиями, проведенными параллельно ординатамъ на равномъ разстояніи другъ отъ друга; тогда, въ приведенной формулѣ, Δx обозначаетъ разстояніе между дѣлящими ординатами, а y_{ki} длину самихъ ординатъ. Пользуясь этой формулой для нашего случая, т. е. для опредѣленія величины площади *AEC* (черт. 65), ограниченной веревочной кривой и двумя касательными къ ней въ точкахъ *A* и *E*, раздѣлимъ площадь линиями, параллельными одной изъ касательныхъ и проведенными на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга, на четное число полосокъ *n*, измѣривъ по масштабу полученныя ординаты y_0, y_1, y_2, \dots , а также разстояніе между ними e , получимъ по формулѣ Симпсона



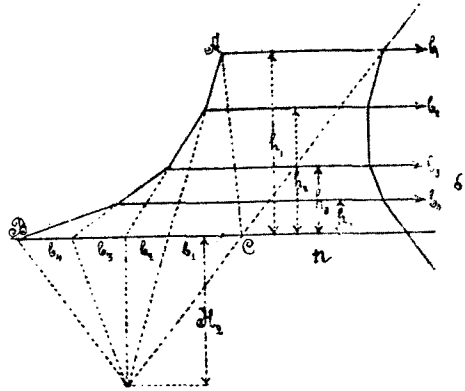
черт. 65.

$$F = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{2n-1})$$

Для опредѣленія величины площади *F* въ томъ случаѣ, когда можно ограничиться меньшей точностью, что бываетъ въ большинствѣ случаевъ при нашихъ расчетахъ, можно разсматривать площадь *F*, какъ состоящую изъ нѣсколькихъ треугольниковъ (черт. 66) съ основаниями b_1, b_2, b_3, \dots и высотами h_1, h_2, h_3, \dots , тогда, очевидно,

$$2F = b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 + \dots = \sum bh$$

Правую часть этого равенства можно разсматривать какъ сумму статическихъ моментовъ относительно оси *BC* силъ b_1, b_2, b_3, \dots , приложенныхъ въ вершинахъ треугольниковъ.



черт. 66.

Такой моментъ, какъ извѣстно, равенъ отрезку крайнихъ лучей веревочнаго многоугольника на оси (*n*), умноженному на полюсное разстояніе (H_2), а потому

$$2F = n \cdot H_2.$$

Моментъ инерціи площади будетъ равенъ, слѣдовательно,

$$I_x = a \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot n.$$

Въ заключеніе объ опредѣленіи моментовъ инерціи, замѣтимъ, что всякое сѣченіе можетъ быть разбито линиями параллельными оси на полоски, которыя съ достаточной степенью точности можно принять за параллелограммы, треугольники и трапеціи, причемъ послѣднія можно, въ свою очередь, разсматривать, какъ состоящая изъ на-

параллелограммовъ и треугольниковъ. Поэтому вопросъ объ опредѣленіи момента инерціи какого угодно сѣченія сводится къ опредѣленію таковыхъ для параллелограмма и треугольника. Такъ какъ, кромѣ того, мы знаемъ зависимость между моментами инерціи относительно осей параллельныхъ, то, слѣдовательно, вопросъ сведется къ опредѣленію моментовъ инерціи параллелограмма и треугольника относительно оси, проходящей черезъ ихъ центръ тяжести и параллельной основанію. Такимъ опредѣленіемъ мы и займемся, но предварительно замѣтимъ слѣдующее: при опредѣленіи моментовъ инерціи каждой изъ площадокъ, на каковыя была раздѣлена данная площадь, нами были приняты разстоянія y отъ данной оси xx до центра тяжести этихъ площадокъ; такое принятое нами разстояніе не совѣмъ точно, такъ какъ *моментъ инерціи площадки*, какъ величины конечной есть *сумма элементарныхъ моментовъ инерціи*, и сумма квадратовъ разстояній этихъ элементовъ не можетъ быть равна квадрату ихъ суммы, т. е. квадрату разстоянія отъ оси до *центра тяжести* всей площадки. Величину же, на квадратъ которой надо умножить данную площадь, чтобы получить ея моментъ инерціи, можемъ получить изъ равенства

$$I_x = \omega \cdot i_x^2,$$

откуда

$$i_x^2 = \frac{I_x}{\omega}.$$

Эта величина i_x называется *плечомъ инерціи*, и опредѣленіемъ ея также займемся какъ для сѣченій параллелограмма и треугольника, такъ и для сложнаго сѣченія; предварительно же укажемъ на зависимость между плечами инерціи относительно осей параллельныхъ.

37. Зависимость между плечами инерціи площади относительно параллельныхъ осей. Мы знаемъ, что моментъ инерціи относительно нѣкоторой оси xx равенъ моменту инерціи, относительно оси ей параллельной и проходящей черезъ центръ тяжести, сложенному съ произведеніемъ площади на квадратъ разстоянія между осями, т. е. (черт. 67)

$$I_x = I_S + l^2 \omega.$$

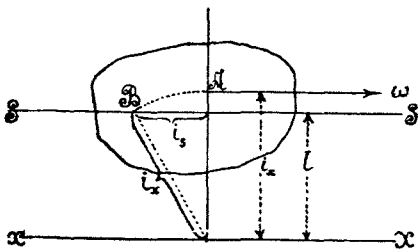
а, такъ какъ $I_x = \omega \cdot i_x^2$ и $I_S = \omega \cdot i_S^2$,

то, подставляя, имѣемъ:

$$\omega \cdot i_x^2 = \omega \cdot i_S^2 + \omega \cdot l^2, \text{ или}$$

$$i_x^2 = i_S^2 + l^2,$$

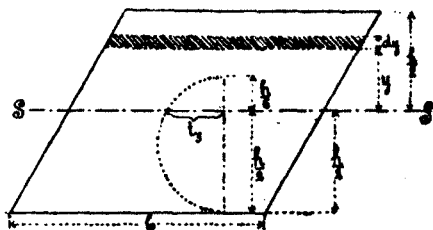
откуда видимъ, что плечо инерціи, относительно оси x (i_x) выражается гипотенузой прямоугольнаго треугольника, катеты котораго: одинъ—плечо инерціи относительно оси SS , проходящей черезъ центръ тяжести площади, другой—разстояніе между осями. Если величина i_S извѣстна, то построеніе для опредѣленія i_x , сдѣланное на чертежѣ, понятно безъ особыхъ поясненій. Изъ этой зависимости плечъ инерціи становится ясно, что достаточно опредѣлить плечи инерціи для площади



черт. 67.

относительно осей, проходящихъ черезъ ея центръ тяжести т. к. выведенная зависимость даетъ возможность опредѣлять плечи инерціи относительно любой оси параллельной.

38. Моментъ и плечо инерціи параллелограмма. Выдѣлимъ въ параллелограммѣ (черт. 68) элементарную полоску шириною b высотой dy , разстояніе же ея до оси SS , проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія, будетъ y ,



черт. 68.

тогда
$$I_S = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot d\omega.$$

$$I_S = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy \cdot b = b \left(\frac{y^3}{3} \right)_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Раздѣливъ полученную величину момента инерціи на площадь, получимъ выраженіе для плеча инерціи

$$i_s^2 = \frac{I_S}{\omega} = \frac{bh^3}{12} : bh = \frac{h^2}{12}$$

откуда i_s можно построить какъ среднюю пропорціональную между $\frac{h}{2}$ и $\frac{h}{6}$, такъ какъ изъ выраженія $i_s^2 = \frac{h^2}{12}$ получимъ, разбивая вторую часть на два множителя

$$\frac{h}{2} : i_s = i_s : \frac{h}{6},$$

изъ чего i_s выразится перпендикуляромъ къ діаметру, раздѣляющему послѣдній на части $\frac{h}{6}$ и $\frac{h}{2}$, что исполнено на чертежѣ.

39. Моментъ и плечо инерціи треугольника. Проведемъ въ треугольникѣ черезъ его центръ тяжести (черт. 69), который находится на одной трети высоты, считая отъ основанія, ось SS параллельно основанію a ; выдѣлимъ полоску высотой dx и шириною y двумя параллельными оси линіями на разстояніи x и $x + dx$ отъ оси SS .

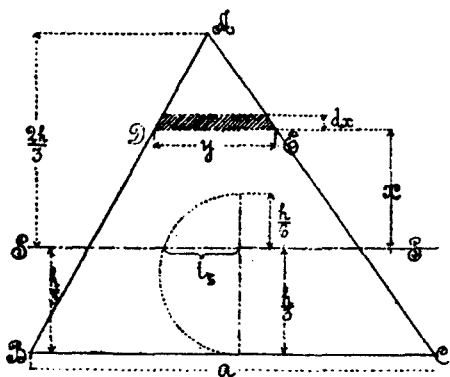
Выраженіе для момента инерціи, по общей формулѣ, имѣетъ видъ

$$I_S = \int_a^b x^2 \cdot d\omega.$$

Въ данномъ случаѣ вмѣсто $d\omega$ подставимъ площадь прямоугольника, съ основаніемъ y и высотой dx , тогда выраженіе элементарнаго момента инерціи будетъ:

$$dI_s = x^2 \cdot y \cdot dx$$

Мы получили въ первой части двѣ переменныя, которыя можно выразить одну черезъ другую; изъ подобія треугольниковъ ABC и ADE



черт. 69.

имѣемъ $y : a = \left(\frac{2h}{3} - x \right) : h$,

откуда $y = \frac{2}{3} a - \frac{ax}{h}$.

Подставляя въ выраженіе элементарнаго момента найденное значеніе для y получимъ

$$dI_s = x^2 \left(\frac{2a}{3} - \frac{ax}{h} \right) dx.$$

Для полученія момента инерціи всего треугольника проинтегрируемъ найденное значеніе

для dI_s , взявъ интегралъ въ предѣлахъ измѣненія x , т. е. отъ $-\frac{h}{3}$ до $+\frac{2h}{3}$; тогда получимъ:

$$I_s = \int_{-\frac{h}{3}}^{+\frac{2h}{3}} x^2 \left(\frac{2a}{3} - \frac{ax}{h} \right) dx$$

$$I_s = \frac{ah^3}{36}.$$

Для полученія плеча инерціи имѣемъ

$$i_s^2 = \frac{I_s}{\omega} = \frac{ah^3}{36} : \frac{ah}{2} = \frac{h^2}{18}.$$

Разбивая правую часть равенства на два множителя $\frac{h}{3}$ и $\frac{h}{6}$, видимъ, что i_s можно построить какъ среднюю геометрическую величину между $\frac{h}{3}$ и $\frac{h}{6}$, что и исполнено на чертежѣ.

40. Моментъ и плечо инерціи площади круга относительно діаметра. Вопросъ рѣшается также на основаніи уравненія

$$I_s = \int_a^b x^2 \cdot d\omega.$$

Для полученія подынтегральной функціи въ зависимости отъ способа образованія круга, выдѣлимъ элементъ, образованный двумя

радіусами и двумя дугами, (черт. 70), проведенными на бесконечно близкихъ разстояніяхъ $d\theta$ и dp другъ отъ друга.

Принимая выдѣленный элементъ, вслѣдствіе бесконечно малыхъ его измѣреній, за прямоугольникъ, получимъ площадь его

$$d\omega = dp \cdot \rho \cdot d\theta,$$

гдѣ $\rho \cdot d\theta$ есть дуга; дальѣ, разстояніе

$$x = \rho \cdot \text{Sn}\theta,$$

и, подставляя найденныя величины въ подынтегральную функцію, найдемъ, что элементарный моментъ инерціи равенъ

$$dI_S = \rho^3 \cdot dp \cdot \text{Sn}^2\theta \cdot d\theta.$$

Для полученія момента инерціи всего круга возьмемъ интеграль

отъ найденнаго выраженія, но, такъ какъ здѣсь двѣ переменныхъ независимыхъ, именно ρ и θ , то интеграль надо взять двойной, предѣлы каждаго будутъ въ зависимости отъ измѣненій независимыхъ переменныхъ, т. е. отъ 0 до R и отъ 0 до 2π ; итакъ, получимъ:

$$I_S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \cdot dp \cdot \text{Sn}^2\theta \cdot d\theta,$$

$$I_S = \int_0^R \rho^3 \cdot dp \cdot \int_0^{2\pi} \text{Sn}^2\theta \cdot d\theta,$$

$$I_S = \left(\frac{\rho^4}{4}\right)_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1 - \text{Cos } 2\theta}{2} \cdot d\theta,$$

$$I_S = \frac{R^4}{4} \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Cos } 2\theta \cdot d\theta \right],$$

$$I_S = \frac{R^4}{4} \left[\left(\frac{\theta}{2}\right)_0^{2\pi} - \left(\frac{\text{Sn } 2\theta}{4}\right)_0^{2\pi} \right],$$

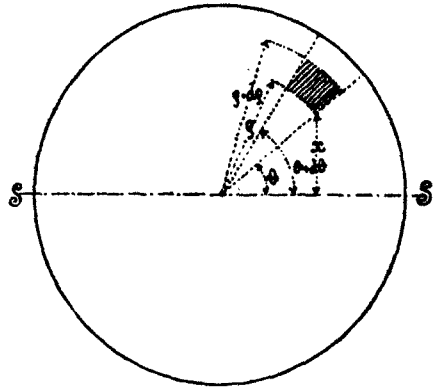
$$I_S = \frac{\pi R^4}{4},$$

или, выражая полученное значеніе для I черезъ діаметръ, найдемъ

$$I_S = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Плечо инерціи получится изъ формулъ

$$i_S^2 = \frac{I_S}{\omega} = \frac{\pi D^4}{64} : \frac{\pi D^2}{4}.$$



черт. 70.

$$i_s^2 = \frac{D^2}{16}$$

оттуда
$$i_s = \frac{D}{4} = \frac{R}{2}$$

41. Опредѣленіе плеча инерціи графически для произвольной площади. Общее выраженіе, найденное для плеча инерціи, имѣетъ видъ

$$i_x^2 = \frac{I_x}{\omega}$$

Если моментъ инерціи нами найденъ по способу Кульмана, то величина его выразится, какъ извѣстно (черт. 63),

$$I_x = a \cdot n \cdot H_1 \cdot H_2$$

также

$$\omega = a \Sigma z$$

Подставляя эти значенія въ общую формулу для выраженія плеча инерціи, получимъ:

$$i_x^2 = \frac{n \cdot H_1 \cdot H_2}{\Sigma z}$$

Чтобы найти графически эту величину, обозначимъ величину правой части, именно:

$$\frac{H_1 \cdot H_2}{\Sigma z} = m,$$

тогда получимъ:

$$i_x^2 = m \cdot n,$$

что легко построить, если извѣстно m , а послѣднее найдется изъ пропорціи

$$H_1 : \Sigma z = m : H_2$$

Для построенія этой послѣдней пропорціи проведемъ на черт. 63 между крайними лучами пераго многоугольника силу прямую линію параллельную AB такъ, чтобы отрѣзокъ ея CB равнялся H_2 , тогда линія, проведенная черезъ полюсъ C_1 перпендикулярно къ Σz или къ AB , дастъ отрѣзокъ $C_1E = m$, такъ какъ,

$$C_1E : BC = H_1 : AB,$$

или

$$C_1E : H_2 = H_1 : \Sigma z.$$

Откладывая затѣмъ на продолженіи того же перпендикуляра отрѣзокъ $C_1F = n$, дѣлимъ $m + n = EF$ пополамъ и изъ середины описываемъ полуокружность; тогда перпендикуляръ C_1G къ диаметру ея EF выразитъ собою искомое плечо инерціи i_x , такъ какъ

$$C_1G^2 = m \cdot n, \text{ т. е. данному выраженію.}$$

42. Зависимость между моментами второго порядка относительно осей проходящихъ черезъ одну точку. Если мы повернемъ около точки O

прямоугольную систему осей x, y на какойнибудь уголъ α , то получимъ новую прямоугольную систему x_1, y_1 (черт. 71). Изъ аналитической же геометрии извѣстно, что:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \\ x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

Моменты второго порядка относительно осей x_1 и y_1 будутъ

$$I_{y_1} = \int x_1^2 \cdot d\omega; I_{x_1} = \int y_1^2 \cdot d\omega; Z_{x_1 y_1} = \int x_1 \cdot y_1 \cdot d\omega.$$

Подставляя сюда вмѣсто x_1 и y_1 ихъ величины, изъ равенствъ (a) получимъ:

$$I_{x_1} = \cos^2 \alpha \int y^2 \cdot d\omega + \sin^2 \alpha \int x^2 \cdot d\omega - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int x \cdot y \cdot d\omega$$

$$I_{y_1} = \sin^2 \alpha \int y^2 \cdot d\omega + \cos^2 \alpha \int x^2 \cdot d\omega + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int x \cdot y \cdot d\omega.$$

$$Z_{x_1 y_1} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left(\int y^2 \cdot d\omega - \int x^2 \cdot d\omega \right) + \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) \int x \cdot y \cdot d\omega.$$

но такъ какъ извѣстно, что:

$$\int y^2 \cdot d\omega = I_x; \int x^2 \cdot d\omega = I_y; \int x \cdot y \cdot d\omega = Z_{xy}$$

то можно написать:

$$\left. \begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - Z_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y_1} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + Z_{xy} \sin 2\alpha \\ Z_{x_1 y_1} &= \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + Z_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Если сложить первыя два уравненія, то получимъ формулу:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \dots (2)$$

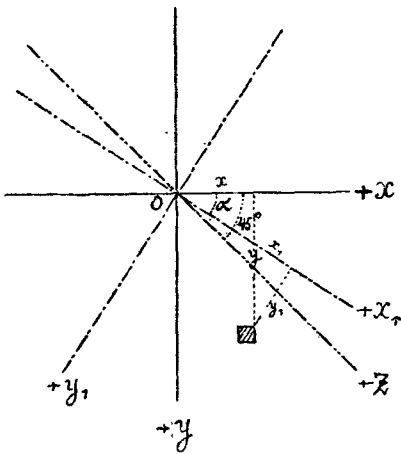
по которой сумма моментовъ инерціи относительно двухъ прямоугольныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, есть величина постоянная.

Проведемъ на чертежѣ 71 ось z подъ угломъ 45° къ оси x^{022} , тогда моментъ инерціи относительно ея, по формулѣ (1), будетъ:

$$I_z = I_x \cos^2 45^\circ + I_y \sin^2 45^\circ - Z_{xy} \sin 90^\circ, \text{ или}$$

$$I_z = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - Z_{xy}, \text{ а отсюда}$$

$$Z_{xy} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - I_z \dots (3)$$



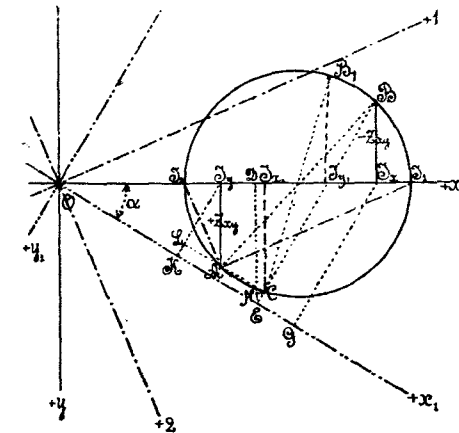
Черт. 71.

$OI_y = I_y$, принявъ предварительно за ось $x^{овв}$ ту, которой соответствует наибольшая величина момента инерции. Возставимъ къ оси Ox въ точкахъ I_x и I_y перпендикуляры и отложимъ отъ точки I_x

величину Z_{xy} въ отрицательномъ направленіи, т. е. вверхъ, а отъ точки I_y ту же величину Z_{xy} внизъ, такъ что:

$$I_y A = +Z_{xy} \text{ и } I_x B = -Z_{xy}$$

Опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BE на ось Ox_1 , а изъ точки A — на ось Oy_1 ; тогда получимъ точку пересѣченія этихъ перпендикуляровъ въ C . Изъ этой точки опускаемъ перпендикуляръ на ось Ox получимъ точку I_{x_1} , опустивъ, далѣе, перпендикуляры изъ точки E на ту же ось Ox , изъ точекъ I_x и I_y на ось Ox_1 и изъ точки C



Черт. 72.

на линію EB , можемъ написать:

$$OI_{x_1} = OD + BI_{x_1} = OE \cos \alpha + EC \sin \alpha,$$

$$\text{но } OE = OG - EG = OI_x \cos \alpha - BI_x \sin \alpha = I_x \cos \alpha - Z_{xy} \sin \alpha,$$

$$\text{а } EC = I_y \sin \alpha - Z_{xy} \cos \alpha;$$

поэтому:

$$OI_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha - Z_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - Z_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Сравнивая эту величину съ формулой (1) n^0 42, мы получимъ, что:

$$OI_{x_1} = I_{x_1}$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$I_{x_1} C = BE - NE = OE \sin \alpha - EC \cos \alpha,$$

или, вставляя вышенайденныя значенія для OE и EC , получимъ:

$$I_{x_1} C = I_x \sin \alpha \cos \alpha - Z_{xy} \sin^2 \alpha - I_y \sin \alpha \cos \alpha + Z_{xy} \cos^2 \alpha,$$

откуда:

$$I_{x_1} C = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + Z_{xy} \cos 2\alpha,$$

т. е., по формулѣ (1) n^0 42:

$$I_{x_1} C = Z_{x_1 y_1}.$$

Уголъ ACB — прямой, поэтому точка C при измѣненіи угла α постоянно лежитъ на окружности, діаметръ которой равенъ AB . И такъ, если на прямой AB , какъ на діаметрѣ, описать окружность и провести черезъ точку A линію, параллельную оси $x^{орб}$, то абсцисса полученной точки пересѣченія этой прямой съ окружностью представитъ изъ себя моментъ инерціи относительно оси $x^{орб}$, а ордината — произведеніе инерціи.

Для нахождения I_y пользуются формулой (2) n^0 42, т. е.

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y,$$

или же графически можно найти I_{y_1} , если провести діаметръ CB_1 и изъ точки пересѣченія его съ окружностью опустить перпендикуляръ на ось Ox , тогда отрѣзокъ OI_{y_1} представитъ собою искомый моментъ инерціи I_{y_1} .

44. Главные моменты инерціи и главные оси. Окружность на чертежѣ 72 пересѣкаетъ ось $x^{орб}$ въ точкахъ I_1 и I_2 , поэтому, очевидно, что наибольшая величина, которой можетъ достигнуть моментъ инерціи для данного сѣченія относительно осей, проходящихъ черезъ точку O будетъ: $I_1 = OI_1$, причемъ для получения положенія оси, которой онъ соотвѣтствуетъ, нужно соединить точку A и I_1 и провести черезъ начало координатъ прямую, параллельную AI_1 , тогда линія $[O(+1)]$ выразитъ собою искомую ось. Наименьшая величина момента инерціи будетъ: $I_2 = OI_2$ и ей соотвѣтствуетъ ось $[O(+2)]$, параллельная направленію AI_2 или перпендикулярная къ оси $[O(+1)]$.

Величины I_1, I_2 называются *главными моментами инерции*, а оси, относительно которыхъ они берутся,—*главными осями*, причемъ, какъ видно изъ чертежа произведение инерции для этихъ осей равно нулю; иначе говоря въ каждой точкѣ O на плоскости сѣченія находятся такія двѣ прямоугольныя оси, произведение инерции относительно которыхъ равно нулю.

Аналитическій выводъ для опредѣленія положенія главныхъ осей, сводится къ опредѣленію угла α , образуемаго положительною осью x съ положительнымъ же направлениемъ одной изъ главныхъ осей

Изъ формулы (1) $n^{\circ 42}$ имѣемъ:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - Z_{xy} \sin 2 \alpha$$

Для полученія *maximum* и *minimum* возьмемъ первую производную отъ I_{x_1} , причемъ переменная будетъ, конечно, α ; тогда имѣемъ:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = -I_x 2 \cos \alpha \sin \alpha + I_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_{xy} \sin 2 \alpha$$

или:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = (I_y - I_x) \sin 2 \alpha - Z_{xy} 2 \cos 2 \alpha$$

Сравнивая эту формулу съ выраженіемъ для $Z_{x_1y_1}$ въ $n^{\circ 42}$ форм. (1), мы видимъ, что $\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = 2 Z_{x_1y_1}$, приравнивая же нулю эту первую

производную для опредѣленія значенія d при которомъ I_{x_1} будемъ имѣть *maximum* или *minimum*, видимъ, что, въ такомъ случаѣ $Z_{x_1y_1} = 0$.

И такъ наибольшее или наименьшее значеніе будетъ имѣть моментъ инерціи, если произведение инерціи равно нулю, приравнивая далѣе правую часть предыдущаго выраженіе нулю, получимъ

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 Z_{xy}}{I_y - I_x} \dots (4)$$

Это и есть то значеніе угла, которое опредѣляетъ положеніе главныхъ осей. Остается рѣшить еще одинъ вопросъ: будемъ ли I_{x_1} имѣть значеніе *maximum* или *minimum*, или то и другое, для этой цѣли надо взять, какъ извѣстно, вторую производную и посмотрѣть будетъ ли она положительна или отрицательна при найденномъ значеніи независимо переменной, въ нашемъ случаѣ α .

Какое бы значеніе ни имѣло выраженіе правой части равенства (4), мы всегда найдемъ для $\operatorname{tg} 2 \alpha$ два угла, отличающіеся на π другъ отъ друга, а потому α имѣетъ два значенія, разнящіеся другъ отъ друга на $\frac{\pi}{2}$, т. е. на 90° .

Дифференцируемъ еще разъ и вставляемъ вмѣсто α значенія: α и $(90^\circ + \alpha)$, получимъ:

$$\frac{d^2 I_{x_1}}{d\alpha^2} = 2(I_y - I_x) \cos 2\alpha + 4 \sin 2\alpha Z_{xy} \dots \text{при } \alpha$$

и

$$\frac{d^2 I_{x_1}}{d\alpha^2} = -2(I_y - I_x) \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha Z_{xy} \dots \text{при } 90^\circ + \alpha.$$

отсюда видно, что величины второй производной имѣютъ разные знаки; это указываетъ на то, что данное выражение, I_{x_1} имѣетъ *minimum* при значеніи независимой переменнѣй, равномъ α и *maximum* при $90^\circ + \alpha$, т. е., что въ каждомъ сѣченіи есть, по крайней мѣрѣ, двѣ взаимно перпендикулярныя оси, для которыхъ моменты инерціи будутъ *maximum* и *minimum*.

Такимъ образомъ всякое сѣченіе имѣетъ по крайней мѣрѣ двѣ главныя оси. Если слуйно $Z_{xy} = 0$, то сами координатныя оси x и y суть главныя оси (ур. 4). Можетъ однако случиться, что всякая ось, проходящая черезъ центръ тяжести есть главная ось и именно тогда, когда $Z_{xy} = 0$ и въ то же время $I_x = I_y$. Правая часть уравн. 4 принимаетъ тогда неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, но изъ ур.

$$Z_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (I_y - I_x) \sin 2\alpha + Z_{xy} \cos 2\alpha.$$

видимъ, что $Z_{x_1 y_1} = 0$ для всякой оси, а изъ уравн. $I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - Z_{xy} \sin 2\alpha$ слѣдуетъ, что всѣ моменты (I_{x_1}) между собой равны.

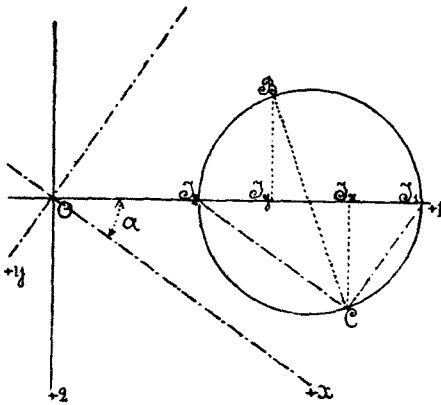
Здѣсь надо замѣтить, что ось симметріи какого либо сѣченія въ то же время есть главная ось, такъ какъ произведеніе инерціи относительно этой оси и ей перпендикулярной, или косоугольной, смотря по тому, какова площадь, равно нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, если такая ось раздѣляетъ наше сѣченіе на двѣ симметричныя половины, то для каждой площадки въ одной половинѣ можно найти такую же площадку въ другой половинѣ такъ, чтобы произведеніе $xyd\omega$ для той и другой были одинаковы; тогда $\int xyd\omega$ можно разложить на два одинаковыхъ интеграла, но съ прямо противоположными предѣлами, откуда очевидно, что полный $\int xyd\omega = 0$.

Такимъ образомъ, если только сѣченіе симметрично, то ось симметріи принимается за одну изъ главныхъ осей, другая же ось будетъ ей перпендикулярна, въ частномъ же случаѣ можетъ быть и наклонна, и опредѣляютъ моментъ второго порядка относительно этихъ осей, зная главные моменты инерціи можемъ опредѣлить величины I_x , I_y , Z_{xy} для какихъ либо другихъ осей, проходящихъ черезъ начало координатъ главныхъ осей, слѣдующимъ образомъ:

Наносимъ въ любомъ масштабѣ на оси $(O, +1)$ [черт. 77], $OI_1 = I_1$ и $OI_2 = I_2$, строимъ окружность на линіи $I_1 I_2$, какъ на діаметрѣ и черезъ точки I_2 и I_1 проводимъ линіи, параллельныя осямъ Ox и Oy , тогда абсцисса (OI_x) точки пересѣченія C будетъ $-I_x$, а ордината

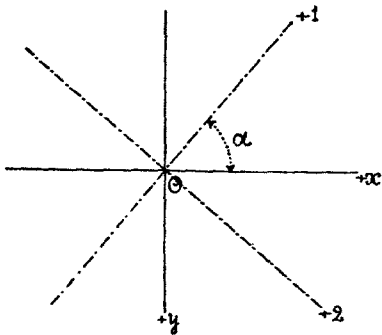
$I_{x_1} C = Z_{xy}$; для опредѣленія же I_y проводимъ діаметръ (CB) круга черезъ точку C и для полученной такимъ образомъ точки B находимъ абсциссу $OI_y = I_y$.



черт. 73.

носительно произвольныхъ, взаимно перпендикулярныхъ, осей координатъ, воспользуемся ур. (1) n^0 42 для опредѣленія моментовъ инерціи I_1 и I_2 относительно главныхъ осей, проходящихъ черезъ тоже начало.

Полагая въ уравненіяхъ (1) n^0 42 оси x и y главными и замѣняя оси x_1 и y_1 черезъ x и y , имѣя даѣе въ виду что произведение инерціи относительно главныхъ осей равно нулю, получимъ (черт. 74)



черт. 74.

$$I_x = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha$$

$$I_y = I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha$$

Складывая и вычитая эти уравненія, имѣемъ:

$$I_x + I_y = I_1 + I_2$$

$$(I_x - I_y) \sec 2\alpha = I_1 - I_2$$

Отсюда опять черезъ сложение и вычитаніе получимъ:

$$I_1 = \frac{1}{2} [I_x + I_y + \sec 2\alpha (I_x - I_y)]$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [I_x + I_y - \sec 2\alpha (I_x - I_y)].$$

Подставляя въ эти уравненія вмѣсто $\sec 2\alpha$ его значеніе, которое найдемъ изъ уравненія 4 n^0 44, имѣющаго видъ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 Z_{xy}}{I_y - I_x}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{Sec} 2\alpha = \pm \sqrt{1 + \frac{4 Z_{xy}^2}{(I_y - I_x)^2}}$$

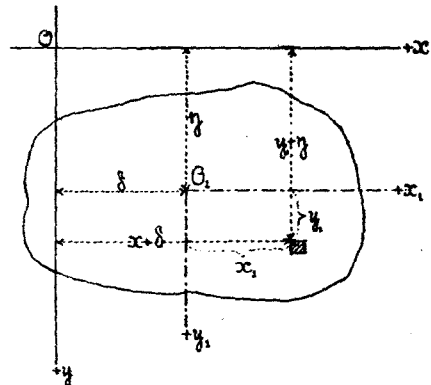
Получимъ окончательно:

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(I_x - I_y)^2 + Z_{xy}^2} \dots (2)$$

Такимъ образомъ, получимъ значенія главныхъ моментовъ инерціи, выраженныя черезъ произвольные моменты 2-го порядка.

46. Опредѣленіе произведенія инерціи относительно осей параллельныхъ осямъ, относительно которыхъ произведеніе инерціи извѣстно. Положимъ, что намъ извѣстно произведеніе инерціи $Z_{x_1 y_1}$ относительно

осей x_1 и y_1 , проходящихъ черезъ центръ тяжести O_1 сѣченія площадки ω (черт. 75); тогда для опредѣленія произведенія инерціи Z_{xy} относительно осей



Ox и Oy , параллельныхъ прежнимъ осямъ и имѣющихъ начало въ точкѣ O , координаты которой относительно осей $O_1 x_1$ и $O_1 y_1$ будутъ $-\eta$ и $-\delta$; будемъ имѣть:

$$Z_{xy} = \int (x_1 - \delta)(y_1 - \eta) d\omega,$$

откуда

черт. 75.

$$Z_{xy} = \int x_1 y_1 - \delta \int y_1 d\omega - \eta \int x_1 d\omega - \eta \delta \int d\omega.$$

Но

$$\int y_1 d\omega = 0, \int x_1 d\omega = 0, \int x_1 y_1 d\omega = Z_{x_1 y_1},$$

а потому, подставляя, получимъ:

$$Z_{xy} = Z_{x_1 y_1} + \eta \delta \omega \dots (5).$$

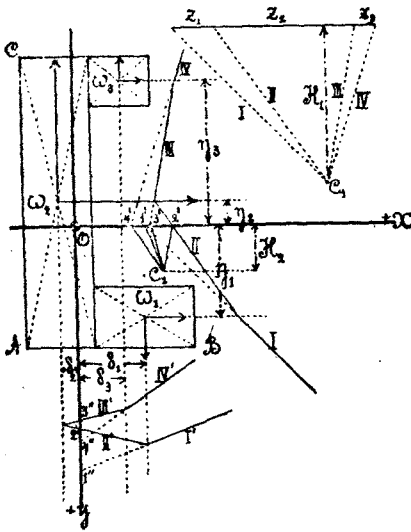
Въ частномъ случаѣ, если оси x_1 и y_1 главные, то:

$$Z_{xy} = \eta \delta \omega \dots (6).$$

47. Опредѣленіе произведенія инерціи графическимъ путемъ. Пользуясь тѣмъ же способомъ построения, какой былъ принятъ нами для опредѣленія момента инерціи площади, съ помощью уравненія б n^0 46, можемъ опредѣлить графическимъ путемъ произведеніе инерціи сѣченія, изображеннаго на черт. 76, которое можно разбить на прямоугольники съ площадями ω_1 , ω_2 и ω_3 .

Проводя оси Ox и Oy параллельно сторонам AB и AC сѣченія, видимъ, что координаты центра тяжести каждаго изъ прямоугольниковъ будутъ:

$$\begin{aligned} \text{для } \omega_1 &+ \delta_1, + \eta_1. \\ \text{„ } \omega_2 &- \delta_2, - \eta_2. \\ \text{„ } \omega_3 &+ \delta_3, - \eta_3. \end{aligned}$$



черт. 76.

долженными лучами послѣдняго на оси Ox , приложенныя въ тѣхъ же центрахъ тяжести, но дѣйствующія параллельно оси Oy .

Второй веревочный многоугольникъ $1'2'3'4'$, хотя и не параллельный новому направлению силы, уже имѣется, поэтому мы имъ воспользуемся, выбравъ лишь новый полюсъ на разстояніи H_2 и проведемъ лучи второго веревочнаго многоугольника, не параллельно лучамъ многоугольника силъ, а перпендикулярно. Отрѣзокъ m дѣлаемый на оси Oy крайними лучами второго веревочнаго многоугольника, и дасть намъ величину пропорціональную произведенію инерціи.

Дѣйствительно, мы имѣемъ, что:

$$\left. \begin{aligned} 1'2' &= \frac{z_1 \eta_1}{H_1} \\ - 2'3' &= - \frac{z_2 \eta_2}{H_1} \\ - 3'4' &= - \frac{z_3 \eta_3}{H_1} \end{aligned} \right\} \dots (A).$$

Изъ второго многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника получимъ

На основаніи уравненія 6 n^0 46 можемъ написать

$$Z_{xy} = \omega_1 \eta_1 \delta_1 + \omega_2 \eta_2 \delta_2 - \omega_3 \eta_3 \delta_3. \quad (A)$$

Для полученія этого выраженія графически поступаемъ какъ и раньше.

Обращаемъ наши прямоугольники въ равновеликіе имъ треугольники съ общимъ основаніемъ a , тогда получимъ высоты z_1 , z_2 и z_3 , которыя, очевидно, равны:

$$z_1 = \frac{\omega_1}{a}, z_2 = \frac{\omega_2}{a}, z_3 = \frac{\omega_3}{a}. \quad (B)$$

Примемъ эти высоты, какъ силы, приложенныя, въ центрѣ тяжести соответственныхъ прямоугольниковъ, параллельно оси Oy .

Построимъ многоугольникъ силъ и первый веревочный многоугольникъ; отрѣзки, дѣлаемые про-

$$1''2'' : \delta_1 = 1'2' : H_2 \text{ или } H_2 \cdot 1''2'' = 1'2' \cdot \delta_1.$$

$$2''3'' : -\delta_2 = -1'2' : H_2 \quad , \quad H_2 \cdot 2''3'' = -2'3' \cdot -\delta_2.$$

$$-3''4'' : \delta_3 = -3'4' : H_2 \quad , \quad H_2 \cdot -3''4'' = -3'4' \cdot \delta_3.$$

Сложивъ почленно лѣвыя и правыя части равенствъ, получимъ:

$$H_2 (1''2'' + 2''3'' - 3''4'') = 1'2' \cdot \delta_1 + 2'3' \cdot \delta_2 - 3'4' \cdot \delta_3.$$

откуда

$$H_2 m = 1'2' \delta_1 + 2'3' \delta_2 - 3'4' \delta_3.$$

вставляя сюда значенія изъ равенствъ (С) получимъ:

$$H_2 m = \frac{z_1 \eta_1 \delta_1}{H_1} + \frac{z_2 \eta_2 \delta_2}{H_1} - \frac{z_3 \eta_3 \delta_3}{H_1}$$

или, принимая во вниманіе равенства (В), получимъ окончательно:

$$a H_2 H_1 m = \omega_1 \eta_1 \delta_1 + \omega_2 \eta_2 \delta_2 - \omega_3 \eta_3 \delta_3$$

Слѣдовательно:

$$Z_{xy} = a H_1 H_2 m.$$

Подобный способъ опредѣленія произведенія инерціи можетъ быть примѣненъ къ любой площади, причемъ площадь должна быть разбита на площадки линиями, параллельными одной изъ осей x или y .

48. Опредѣленіе моментовъ второго порядка относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести площади, безъ опредѣленія самаго центра тяжести. Если данная площадь можетъ быть разбита на нѣсколько частей, моменты 2-го порядка которыхъ, относительно осей, проходящихъ черезъ ихъ центры тяжести, извѣстны, и оси эти параллельны, то можно найти моменты 2-го порядка всей площади относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести всей площади и параллельныхъ даннымъ.

Положимъ, что извѣстны: I_{x_1} , I_{y_1} , $Z_{x_1 y_1}$, I_{x_2} , I_{y_2} и $Z_{x_2 y_2}$ (черт. 77), кромѣ того дано, что:

$$S_2 x_2 \text{ паралл. } S_1 x_1 \text{ паралл. } Sx$$

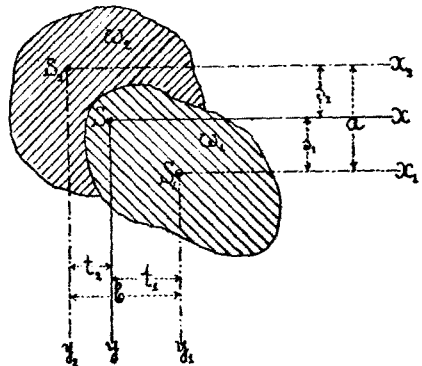
$$S_2 y_2 \quad \quad \quad S_1 y_1 \quad \quad \quad Sy,$$

что S_2 и S_1 — центры тяжести составныхъ частей площади, и положимъ, что S центръ тяжести всей площади.

На основаніи зависимости между моментами 2-го порядка относительно параллельныхъ осей и принимая во вниманіе, что моментъ 2-го порядка всего сѣченія равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ частей, имѣемъ

$$I_x = I_{x_1} + \omega_1 s_1^2 + I_{x_2} + \omega_2 s_2^2 \dots \dots (A).$$

Зная, далѣе, что статическій моментъ относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести равенъ нулю и что статическій мо-



черт. 77.

ментъ всего сѣченія равенъ суммѣ моментовъ, составляющихъ площадей, можемъ написать:

$$M_0 = \omega_1 s_1 - \omega_2 s_2 = 0.$$

откуда

$$\omega_1 s_1 = \omega_2 s_2.$$

Кромѣ того,

$$s_1 + s_2 = a$$

поэтому

$$\omega_1 s_1 = \omega_2 (a - s_1),$$

а отсюда

$$s_1 = \frac{\omega_2 a}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Также получимъ

$$s_2 = \frac{\omega_1 a}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ получимъ:

$$\omega_1 s_1^2 + \omega_2 s_2^2 = \frac{\omega_1 \omega_2 a (s_1 + s_2)}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\omega_1 \omega_2 a^2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Вставляя полученное значеніе въ формулу (A), получимъ:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + \frac{\omega_1 \omega_2 a^2}{\omega_1 + \omega_2} \dots (10)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + \frac{\omega_1 \omega_2 b^2}{\omega_1 + \omega_2} \dots (11)$$

Пользуясь уравненіемъ, что

$$Z_{xy} = Z_{x_1 y_1} + Z_{x_2 y_2} + \omega_1 s_1 t_1 + \omega_2 s_2 t_2$$

найдемъ также:

$$Z_{xy} = Z_{x_1 y_1} + Z_{x_2 y_2} + \frac{\omega_1 \omega_2 a b}{\omega_1 + \omega_2} \dots (12)$$

Въ частномъ случаѣ, если x_1, y_1, x_2 и y_2 главныя оси частей ω_1 и ω_2 то

$$Z_{xy} = \frac{\omega_1 \omega_2 a b}{\omega_1 + \omega_2} \dots (13)$$

Помощью этихъ четырехъ выведенныхъ равенствъ возможно опредѣлить I_x, I_y, Z_{xy} , не опредѣляя предварительно центра тяжести всей площади, такъ какъ координаты его не входятъ въ наши равенства. Если даже извѣстно положеніе центра тяжести сѣченія, то все-таки выведенныя въ этомъ n^0 формулы, представляютъ то преимущество передъ выведенными раньше въ $n^0 46$, что числа a и b бѣвають болѣе округлены, чѣмъ η и δ .

49. Моменты второго порядка при косоугольныхъ осяхъ Положимъ, мы имѣемъ прямоугольныя оси x и y (черт. 78), повернемъ одну изъ нихъ, напр. x , около начала координатъ на нѣкоторой уголъ $90^\circ - \beta$, тогда координаты нѣкоторой точки будутъ:

$$y' = y - x \operatorname{ctg} \beta; \quad x' = x \operatorname{cosec} \beta \dots (A).$$

Кромѣ того извѣстно, что:

$$I_x = \int y^2 d\omega; \quad I_y = \int x^2 d\omega, \quad Z_{xy} = \int x y d\omega$$

Также для моментовъ второго порядка относительно косоугольныхъ осей $x'y'$ найдемъ:

$$I_{x'} = \int y'^2 d\omega, \quad I_{y'} = \int x'^2 d\omega, \quad Z_{x'y'} = \int x'y' d\omega$$

Подставляя въ эти обозначенія вмѣсто x' и y' величины изъ уравненій (А), получимъ

$$I_{x'} = \int (y - x \operatorname{ctg} \beta)^2 d\omega = \int y^2 d\omega + \\ - \int 2xy \operatorname{ctg} \beta d\omega + \int x^2 \operatorname{ctg}^2 \beta d\omega,$$

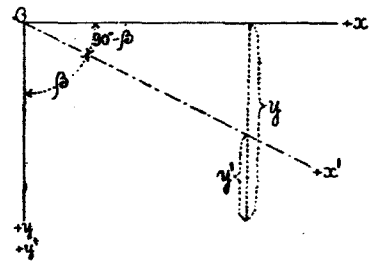
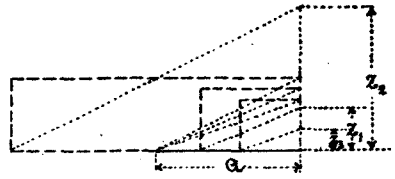
или $I_{x'} = I_x + \operatorname{ctg}^2 \beta I_y - 2 \operatorname{ctg} \beta Z_{xy} \dots (14)$

$$I_{y'} = \operatorname{Cosec}^2 \beta \int x^2 d\omega$$

$$I_{y'} = I_y \operatorname{Cosec}^2 \beta \dots (15)$$

$$Z_{x'y'} = \operatorname{Cosec} \beta \left(\int xy d\omega - \operatorname{ctg} \beta \int x^2 d\omega \right)$$

$$Z_{x'y'} = \operatorname{Cosec} \beta \left(Z_{xy} - I_y \operatorname{ctg} \beta \right) \dots (15)$$



черт. 78.

Изъ уравненія 16 полагая $Z_{x'y'} = 0$, т. е. полагая оси x' и y' главными осями получимъ:

$$Z_{xy} = I_y \operatorname{ctg} \beta$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{Z_{xy}}{I_y} \dots (17)$$

Отсюда ясно обратное заключеніе, а именно: если $\operatorname{ctg} \beta$ равенъ вышенайденной величинѣ, то произведеніе инерціи относительно осей x' и y' равно нулю.

50. Эллипсъ инерціи. Въ заключеніе этой главы о моментахъ второго порядка укажемъ на одно свойство ихъ относительно осей, проходящихъ черезъ одну точку.

Положимъ, что какая нибудь площадь отнесена къ главнымъ осямъ, проходящимъ черезъ точку O , относительно которыхъ моменты инерціи извѣстны. Тогда главныя плечи инерціи, какъ извѣстно, будутъ:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{\omega}}$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{\omega}}$$

Имѣя эти выраженія, можно, на основаніи формулы

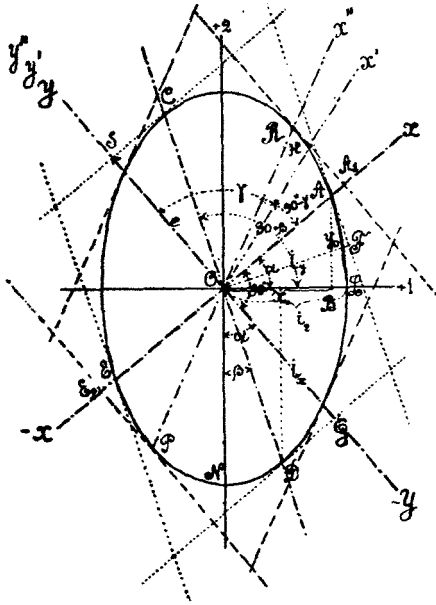
$$I_x = I_1 \operatorname{Cos}^2 \alpha + I_2 \operatorname{Sn}^2 \alpha$$

раздѣливъ обѣ части ея на площадь ω , написать:

$$ix^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha \dots (A)$$

гдѣ i_x будетъ плечо инерціи для тогоже сѣченія относительно оси, проходящей черезъ тоже начало подѣ угломъ α къ оси $+1$.

Выбирая новую произвольную ось x_1 , проходящую черезъ начало координатъ и образующую уголъ α_1 съ осью $+1$, найдемъ для плеча инерціи относительно ея подобное же выраженіе, и т. д. для сколькихъ угодно осей. Зависимость между этими плечами инерціи $i_x, i_{x_1}, i_{x_2}, \dots$, какъ функціями отъ угловъ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ можно представить геометрически, и казалось бы,



черт. 79.

съ перваго взгляда всего проще, откладывать полученные для соответствующихъ осей отрезки $i_x, i_{x_1}, i_{x_2}, \dots$ на этихъ осяхъ отъ начала координатъ, и соединить ихъ концы плавною кривою линією, которая въ дальнѣйшемъ можетъ, слѣдовательно, служить для обратнаго рѣшенія вопроса, т. е. для нахождения плеча инерціи, а, слѣдовательно, и момента инерціи относительно произвольной оси, проходящей черезъ начало координатъ. Хотя противъ такого способа на первый взглядъ, какъ замѣчено выше, нельзя ничего возразить, но однако онъ представляетъ то неудобство, что полученная такимъ образомъ кривая имѣла бы уравненіе четвертой степени, о свойствахъ же таковой кривой намъ ничего неизвѣстно.

Поэтому постараемся обойти это неудобство, примѣняя извѣстную намъ кривую, а именно

кривую, уравненіе второй которой степени.

Для этого выберемъ произвольную длину k и отложимъ (для замѣны четвертой степени — второю) по оси x отъ точки O (черт. 79) отрезокъ

$$t_x = \frac{k^2}{i_x} \dots (B)$$

Назовемъ координаты полученной точки A черезъ x_0 и y_0 , тогда изъ треугольника ABO получимъ:

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{t_x}$$

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{t_x}$$

Вставивъ эти значенія для Cosa и Sna въ формулу (A), имѣемъ:

$$i_x^2 = \frac{i_1^2 x_0^2}{t_x^2} + \frac{i_2^2 y_0^2}{t_x^2}, \text{ или,}$$

замѣнивъ t_x черезъ выраженіе его (B), получимъ:

$$i_x^2 = \frac{i_1^2 x_0^2 \cdot i_x^2}{k^4} + \frac{i_2^2 y_0^2 \cdot i_x^2}{k^4},$$

откуда

$$1 = \frac{i_1^2 x_0^2}{k^4} + \frac{i_2^2 y_0^2}{k^4},$$

или

$$1 = \frac{x_0^2}{\left(\frac{k^2}{i_1}\right)^2} + \frac{y_0^2}{\left(\frac{k^2}{i_2}\right)^2},$$

а это есть уравненіе эллипса у котораго главные полуоси будутъ

$$\frac{k^2}{i_1} \text{ и } \frac{k^2}{i_2}$$

Построивъ на такихъ главныхъ осяхъ эллипсъ и проведя черезъ точки A и B къ нему двѣ касательныя и двѣ касательныя параллельныя оси x съ точками касанія C и D , получимъ на основаніи свойствъ эллипса, извѣстныхъ изъ аналитической геометріи, что:

$$t_x \cdot e = \frac{k^2}{i_1} \cdot \frac{k^2}{i_2}$$

такъ какъ CD будетъ сопряженный діаметръ съ осью x , ибо извѣстно, что касательныя къ эллипсу параллельны діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку касанія, а свойство сопряженныхъ діаметровъ таково что площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ полудіаметрахъ, есть величина постоянная и равняется произведенію полуосей, что нами и написано, такъ какъ e есть длина перпендикуляра отъ начала координатъ до касательной параллельной оси x . Изъ написаннаго равенства

находимъ:

$$e = \frac{k^4}{i_1 i_2 t_x}.$$

Если положить, что выбранное произвольно

$$k = \sqrt{i_1 i_2}$$

и замѣтить, что

$$t_x = \frac{k^2}{i_x},$$

то получимъ, что

$$e = \frac{k^4 \cdot i_x}{i_1 i_2 k^2} = \frac{k^2 \cdot i_x}{i_1 i_2} = i_x.$$

Слѣдовательно, разстояніе отъ начала координатъ до касательной параллельной произвольной оси x будетъ радиусомъ инерціи относительно таковой оси.

Вставляя принятое значеніе для k въ выраженіе для длины главныхъ полуосей

$$OL = \frac{k^2}{i_1} = \frac{i_1 i_2}{i_1} = i_2,$$

$$ON = \frac{k^2}{i_2} = \frac{i_1 i_2}{i_2} = i_1,$$

получимъ на оси $+1$ полуось, равную плечу инерціи относительно оси $+2$, и наоборотъ.

Эллипсъ, построенный такимъ образомъ, называется **ЭЛЛИПСОМЪ Инерціи** и въ случаѣ если центръ его совпадаетъ съ центромъ тяжести сѣченія, — **центральнымъ эллипсомъ инерціи**.

Изъ указаннаго построенія ясно, какимъ образомъ опредѣлить моментъ инерціи относительно какой нибудь оси x_1 , пользуясь построеннымъ эллипсомъ инерціи. Для этого надо провести касательную, параллельную выбранной оси x_1 и взявъ разстояніе между этими двумя линиями, каковое и представитъ изъ себя плечо инерціи относительно оси x_1 въ случаѣ если вышеприведенная величина k избрана равной $\sqrt{i_1 i_2}$; въ противномъ же случаѣ вмѣсто непосредственной величины i_{x_1} , получимъ величину ей пропорціональную и равную

$$t_x = \frac{k^2}{i_{x_1}}$$

Кромѣ плечъ инерціи, a , слѣдовательно, и моментовъ инерціи, построенный эллипсъ даетъ возможность опредѣлить и произведеніе инерціи относительно осей Ox и Oy . Дѣйствительно, изъ аналитической геометріи извѣстно, изъ свойствъ сопряженныхъ диаметровъ, что:

$$tg\alpha \cdot tg(90 + \beta) = - \frac{ON^2}{OL^2} \text{ откуда}$$

$$tg(90 + \beta) = - \frac{ON^2}{OL^2 \cdot tg\alpha} \text{ или}$$

$$-ctg\beta = - \frac{ON^2}{OL^2 \cdot tg\alpha}, \quad \text{а слѣдовательно:}$$

$$tg\beta = \frac{OL^2 \cdot tg\alpha}{ON^2} = \frac{i_2^2 \cdot tg\alpha}{i_1^2} \dots \dots \dots (C)$$

Изъ треугольника же BGO имѣемъ, что

$$BG = OG \cdot tg\beta = i_x \cdot tg(\alpha - \beta),$$

вставляя сюда вмѣсто тангенса разности угловъ его выраженіе изъ тригонометріи, получимъ

$$DG = \frac{i_x(tg\alpha - tg\beta)}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

подставляя вмѣсто $tg\beta$, найденное значеніе въ уравненіи (C), получимъ

$$DG = \frac{i_x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{i_2^2}{i_1^2} \operatorname{tg} \alpha \right)}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot i_2^2}{i_1^2}}, \text{ или}$$

$$DG = \frac{i_x \operatorname{tg} \alpha (i_1^2 - i_2^2) \operatorname{Cos}^2 \alpha}{i_1^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha + i_2^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha}$$

Принимая во вниманіе формулу (A), получимъ

$$BG = \frac{\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha (i_1^2 - i_2^2)}{i_x}$$

Умноживъ же числителя на ω и умноживъ и раздѣливъ на 2, получимъ

$$DG \cdot \omega = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Sin} 2\alpha (I_1 - I_2)}{i_x}$$

Величина числителя равна, какъ извѣстно изъ формулы (1) $n^{\circ} 42$, Z_{xy} , а потому:

$$BG \cdot \omega \cdot i_x = Z_{xy}.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что отрѣзокъ BG на касательной между перпендикуляромъ и точкой касанія есть величина, пропорціональная произведенію инерціи. Также легко показать, что перпендикуляръ изъ точки O на касательную, параллельную оси y , будетъ равенъ $OA_1 = i_y$, и отрѣзокъ между основаніемъ этого перпендикуляра и діаметромъ,

сопряженнымъ съ осью y , т. е. отрѣзокъ $A_1 R = \frac{Z_{xy}}{\omega \cdot i_y}$.

Если оба главные момента инерціи I_1 и I_2 будутъ между собою равны, то эллипсъ инерціи превратится въ окружность, и тогда всѣ моменты инерціи относительно осей, проходящихъ черезъ точку O , будутъ равны между собою. Въ этомъ случаѣ всѣ оси будутъ, въ то же время, и главными осями.

Такой случай имѣетъ мѣсто въ квадратѣ или въ какомъ нибудь правильномъ многоугольникѣ, точно также какъ и въ равноконечномъ, крестообразномъ сѣченіи; для тавроваго и двутавроваго сѣченій можно всегда подобрать такое соотношеніе между высотой и шириною ихъ, чтобы $I_1 = I_2$, и тогда для этихъ сѣченій всѣ моменты инерціи относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести, будутъ тоже равны между собою.

До сихъ поръ мы говорили о прямоугольныхъ осяхъ, если же почему либо, главные прямоугольныя оси опредѣлить трудно, то иногда является выгоднымъ примѣнить косоугольную систему осей.

Для этого повернемъ ось Ox на уголъ $90^\circ - \gamma$ въ положеніе Ox' ось же Oy оставимъ на старомъ мѣстѣ тогда получимъ систему косоугольныхъ осей Ox и Oy съ угломъ между ними γ .

Выше было найдено ($n^{\circ} 49$), что

$$I_{y'} = I_y \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \gamma} \dots (15)$$

$$\ddot{Z}'_x' y' = \frac{1}{Sn\gamma} (Z_{xy} - I_y ctg^2\gamma) \dots (16)$$

раздѣливъ обѣ части перваго равенства на ω , а правую часть втораго равенства раздѣливъ и умноживъ на ω , получимъ:

$$i^2 y' = i^2 y \frac{1}{Sn^2\gamma}$$

$$Z_{x'} y' = \frac{1}{Sn\gamma} \left(\frac{Z_{xy}}{\omega} - i^2 y ct\beta \right) \omega,$$

или, зная, что $Z_{xy} = A_1 R \cdot i_y \cdot \omega$, получимъ:

$$i y' = \frac{i y}{Sn\gamma} \dots \dots \dots (A)$$

$$Z_{x'} y' = \frac{i y}{Sn\gamma} \left(A_1 R - i_y \cdot ctg\beta \right) \omega \dots \dots \dots (B)$$

Далѣе легко видѣть изъ треугольника $A_1 O H$, что:

$$OH = \frac{OA_1}{Sn\gamma} = \frac{i y}{Sn\gamma}.$$

$$HR = A_1 R - A_1 H = A_1 R - A_1 O ctg\gamma = A_1 R - i_y ctg\gamma \dots \dots (C)$$

Принимая же во вниманіе формулы (A) и (B), получимъ:

$$OH = i y' \dots \dots \dots (D)$$

Вставляя же вмѣсто правой части равенства (C) величину HR въ равенство (B), получимъ:

$$Z_{x'} y' = \frac{i y}{Sn\gamma} HR \cdot \omega, \text{ откуда}$$

$$HR = \frac{Z_{x'} y' Sn\gamma}{i_y \cdot \omega} \dots \dots \dots (E)$$

Такимъ образомъ, видимъ снова, что отрѣзокъ OH , дѣлаемый на оси Ox' касательной параллельной оси Oy' , равенъ плечу инерціи относительно оси y' , а отрѣзокъ HR на этой касательной, дѣлаемый осью Ox' и діаметромъ, сопряженнымъ съ осью Oy' , пропорціоналенъ величинѣ произведения инерціи.

Если вмѣсто оси Ox' возьмемъ ось Ox'' , а ось Oy'' оставимъ на прежнемъ мѣстѣ, то видимъ что эти оси Ox'' и Oy'' суть сопряженные діаметры и найдемъ также что:

$$OR = i y'',$$

а отрѣзокъ (бывшій для оси Ox' HR), пропорціональный произведенію инерціи, обратится въ нуль, поэтому отсюда слѣдуетъ предложеніе: **всякая система осей, для которой $Z_{xy} = 0$, является системой сопряженныхъ діаметровъ эллипса, и обратно.**

Этотъ выводъ весьма важенъ для такихъ фигуръ, какъ треугольникъ, параллелограммъ, трапеція и т. п., главныя оси которыхъ расположены подъ острымъ или тупымъ угломъ.

Что касается построения эллипса, то зная I_x , I_y и I_{xy} относительно произвольных осей, мы можем определить в каждой четверти эллипса касательную и ее точку касания (на черт. 79), точки D и R и касательныя DG и RA_1 , а также 2 соответствующия точки и 2 касательныя C и P и касательныя CS и E_1P .

Такимъ образомъ, эллипсъ заданъ 8 элементами, для построения же его достаточно 5 элементовъ.

51. Полярные моменты инерции. До сихъ поръ мы говорили о моментахъ инерции относительно такихъ осей, которыя лежать въ плоскости самой площади сѣченія. Все выше изслѣдованное можно примѣнить и въ такомъ случаѣ, когда ось составляетъ произвольный уголъ съ плоскостью сѣченія или ей параллельна. Въ теоріи сопротивленія матеріаловъ придется встрѣтиться еще лишь съ однимъ случаемъ, а именно, со случаемъ опредѣленія момента инерции относительно оси, направленной перпендикулярно къ плоскости сѣченія, т. е. съ такъ называемымъ **полярнымъ моментомъ инерции**.

Если обозначить его черезъ I_p , то общее уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$I_p = \int r^2 d\omega,$$

гдѣ r разстояніе между $d\omega$ и полярною осью.

Проведя черезъ точку пересѣченія полярной оси съ плоскостью сѣченія двѣ взаимно перпендикулярныя оси x и y , лежащія въ этой, плоскости, получимъ что:

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ (черт. 80).}$$

Умножая обѣ части равенства на $d\omega$ и взявъ интегралы, получимъ:

$$I_p = I_y + I_x \dots \dots (18)$$

Слѣдовательно, для опредѣленія полярнаго момента инерции необходимо знать моменты инерции для осей, лежащихъ въ сѣченіи; въ нѣкоторыхъ же случаяхъ является возможность опредѣлить I_p , независимо отъ I_x и I_y . Положимъ, что желаемъ опредѣлить полярный моментъ инерции для площади круга. По общей формулѣ имѣемъ

$$I_p = \int r^2 d\omega.$$

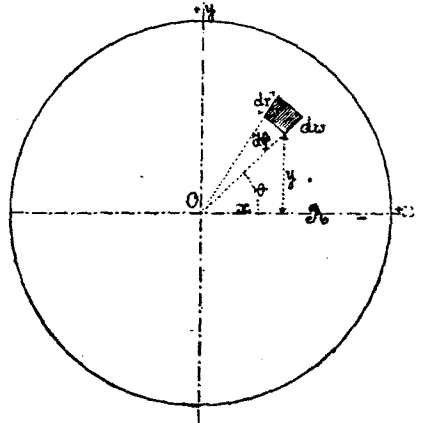
Выдѣлимъ элементъ двумя дугами на разстояніи r и $r + dr$ отъ центра круга и двумя радіусами подъ углами θ и $\theta + d\theta$, тогда:

$$d\omega = dr \cdot r \cdot d\theta$$

а потому:

$$I_p = \int r^3 \cdot dr \cdot d\theta.$$

Здѣсь по интеграломъ двѣ переменныхъ независимыхъ, а потому



черт. 80.

интеграль надо взять двойной т. е.

$$I_p = \int_0^R r^3 \cdot dr \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Интегрируя и подставляя предѣлы, найдемъ:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{22} \text{ или}$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

Если мы воспользуемся выведенною зависимою между моментами инерции, т. е. $I_p = I_x + I_y$, то получимъ также:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Мы ограничимся для опредѣленія полярныхъ моментовъ лишь этимъ единственнымъ случаемъ, какъ вполне достаточнымъ для нашихъ цѣлей. Кромѣ всѣхъ описанныхъ способовъ опредѣленія моментовъ 2^{ого} порядка, существуютъ еще другіе, напр. способъ Нейля, Ланду и наконецъ, кромѣ теоретическихъ способовъ, могутъ быть примѣнены практическіе, самымъ простымъ не требующимъ сложныхъ приборовъ, можно считать способъ Бауера, но онъ вмѣсто съ тѣмъ и не особенно точный. Для болѣе точныхъ же способовъ существуютъ механическіе приборы подъ общимъ названіемъ интеграторовъ. Сюда относятся: планиметр интеграторъ Амслера Лафона, интеграметръ Марселя Дюпре и интеграторъ Бруно Абакановича. Наибольшую извѣстностью пользуется интеграторъ Амслера Лафона (*Amsler's momentenplanimeter*). Устройство его основано на возможности выразить площадь и моменты обоого рода въ функціяхъ отъ числа оборотовъ каточковъ, имѣющихъ опредѣленное положеніе относительно осей моментовъ.

52. Примеры опредѣленія моментовъ 2^{ого} порядка.

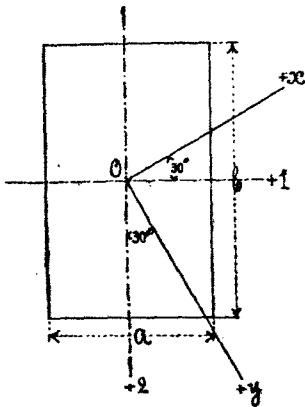
Примѣръ 1^{шй}. Найти моменты 2^{ого} порядка для прямоугольника, относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести и наклоненныхъ къ одной изъ сторонъ подъ угломъ -30° ; система осей прямоугольная. (черт. 81). Примѣняя въ данномъ случаѣ аналитическій методъ и имѣя въ виду, что оси O_1 и O_2 главные оси инерции, какъ оси симметріи, и наконецъ зная, что:

$$I_1 = \frac{ab^3}{12}; I_2 = \frac{a^3b}{12}; Z_{12} = 0.$$

По формулѣ (1) n° 42 получимъ:

$$I_x = \frac{ab^3}{12} \cos^2(-30^\circ) + \frac{a^3b}{12} \sin^2(-30^\circ)$$

$$I_x = \frac{ab^3}{12} \left(\cos^2 30^\circ + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 30^\circ \right)$$



черт. 81.

$$I_y = \frac{ab^3}{12} \operatorname{Sn}^2(-30^\circ) + \frac{a^3b}{12} \operatorname{Cos}^2(-30^\circ)$$

$$Z_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{ab^3}{12} - \frac{a^3b}{12} \right) \operatorname{Sn}(-60^\circ)$$

Но:

$$\operatorname{Cos}^2(-30^\circ) = \operatorname{Cos}^2 30^\circ = 0,866^2 = 0,75$$

$$\operatorname{Sn}^2(-30^\circ) = (-\operatorname{Sn} 30^\circ)^2 = (0,5)^2 = 0,25$$

$$\operatorname{Sn}(-60^\circ) = -\operatorname{Sn} 60^\circ = -0,866$$

Подставляя получимъ:

$$I_x = \frac{ab^3}{16} + \frac{a^3b}{48} = ab \left(\frac{b^2}{16} + \frac{a^2}{48} \right)$$

$$I_y = \frac{ab^3}{48} + \frac{a^3b}{16} = ab \left(\frac{b^2}{48} + \frac{a^2}{16} \right)$$

$$Z_{xy} = 0,433 \left(\frac{a^3b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right)$$

Для опредѣленія I_y можно было воспользоваться также формулой $I_x + I_y = I_1 + I_2$

Примѣръ 2^{ой} Опредѣлить I_x , I_y , и Z_{xy} для сѣченія углового желѣза относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести параллельно полкамъ уголка. (черт. 82)

Воспользуемся для данного случая способомъ, изложеннымъ въ п^о 48, безъ предварительнаго опредѣленія центра тяжести.

Предварительно имѣемъ.

$$\omega_1 = 9\delta^2; \omega_2 = 6\delta^2$$

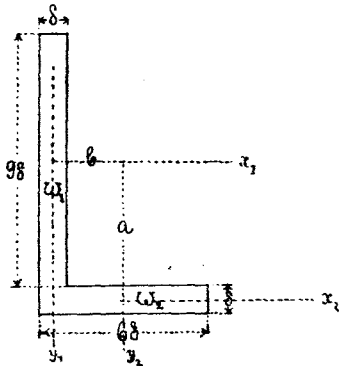
$$a = 5\delta; b = \frac{5}{2}\delta$$

$$I_{x_1} = \frac{(9\delta)^3 \delta}{12}$$

$$I_{y_1} = \frac{9\delta \cdot \delta^3}{12}$$

$$I_{x_2} = \frac{\delta^3 \cdot 6\delta}{12}$$

$$I_{y_2} = \frac{(6\delta)^3 \delta}{12}$$



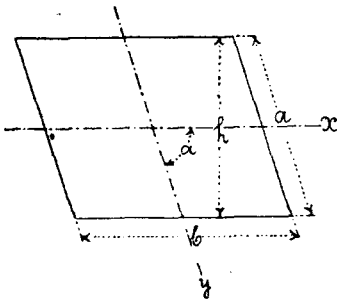
Черт. 72.

Подставляя найденныя значенія въ формулы 10, 11 и 13 п^о 48, получимъ:

$$I_x = \frac{9\delta^4}{12} + \frac{6\delta^4}{12} + \frac{54 \cdot \delta^4 \cdot 5^2 \cdot \delta^2}{9\delta^2 + 6\delta^2} = 151,25 \delta^4$$

$$I_y = \frac{9\delta^4}{12} + \frac{6^3 \delta^4}{12} + \frac{54 \cdot \delta^4 \cdot 5^2 \cdot \delta^2}{2^2(9\delta^2 + 6\delta^2)} = 41,25 \delta^4$$

$$Z_{xy} = \frac{54 \cdot \delta^4 \cdot 5\delta \cdot 5\delta}{2(9\delta^2 + 6\delta^2)} = 45 \delta^4$$



Черт. 83.

Примеръ 3^я. Определить моменты 2^{ого} порядка для параллелограмма относительно его осей симметрии, выразивъ ихъ черезъ стороны и уголъ (черт. 83).

Такъ какъ оси x и y симметричны, то произведение инерции относительно ихъ равно нулю, т. е. $Z_{xy} = 0$.

Моментъ инерции относительно оси x^{0ab} при высотѣ h и основаніи b въ прямоугольныхъ координатахъ будетъ:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \text{ замѣняя } h = a \operatorname{Sn} \alpha \text{ получимъ}$$

$$I_x = \frac{ba^3 \operatorname{sn}^3 \alpha}{12}$$

Но по формулѣ 15 n^0 49 имѣемъ

$$I_y' = I_y \operatorname{Cosec}^2 \alpha$$

для данного случая будетъ имѣть видъ

$$I_x = I_x \operatorname{Cosec}^2 \alpha,$$

или подставляя вмѣсто I_x правой части выраженіе его въ прямоугольныхъ координатахъ, получимъ для косоугольныхъ координатъ

$$I_x = \frac{ba^3 \operatorname{Sn}^3 \alpha}{12} \operatorname{Cosec}^2 \alpha = \frac{ba^3 \operatorname{Sn} \alpha}{12}$$

Точно также можно получить, полагая что для получения прямоугольныхъ осей ось y^{0ab} остается неподвижной, а ось x^{2ab} поворачивается около точки O на уголъ $90 - \alpha$, что

$$I_y = I_y \operatorname{Cosec}^2 \alpha,$$

и имѣя также, что $h_1 = b \operatorname{Sn} \alpha$ и что въ прямоуг. коорд. $I_y = \frac{ab^3 \operatorname{Sn}^3 \alpha}{12}$, получимъ послѣ замѣны, что въ косоуг. координатахъ

$$I_y = \frac{ab^3 \operatorname{Sn} \alpha}{12}$$

Примѣръ 4^{ый}. Определить моментъ инерции треугольника въ координатныхъ координатахъ относительно оси x , другая ось y дѣлитъ сторону b пополамъ (черт. 84).

Мы имѣли, что:

$$I_x = \frac{bh^3}{36}.$$

но $h = a \operatorname{Sn} \beta$, слѣдовательно,

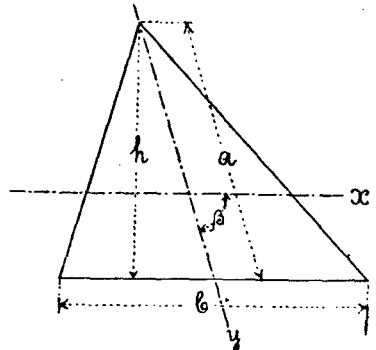
$$I_x = \frac{ba^3 \operatorname{Sn}^3 \beta}{36}.$$

А по формулѣ

$$I_x = I_x \operatorname{Cosec}^2 \beta,$$

получимъ окончательно:

$$I_x = \frac{ba^3 \operatorname{Sn} \beta}{36}.$$



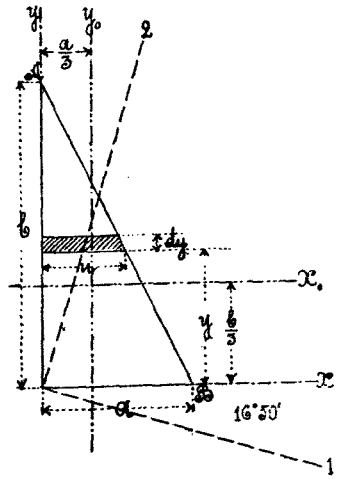
черт. 84.

Примѣръ 5^{ый}. Найти главные оси для площади прямоугольнаго треугольника, проходящя черезъ вершину его прямого угла, и моменты второго порядка относительно этихъ осей (черт. 85).

Для рѣшенія этой задачи воспользуемся формулами (4) n^0 44 и 2 n^0 45, дающими, во-первыхъ, величину тангенса угла ($\operatorname{tg} 2\alpha$), составляемаго главной осью съ осью x , проходящей черезъ то же начало, и, во-вторыхъ, величины главныхъ моментовъ инерции, выраженные черезъ моменты второго порядка, относительно прямоугольныхъ произвольныхъ осей, проходящихъ черезъ тоже начало.

Итакъ, исходя изъ формулъ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2Z_{xy}}{I_y - I_x}$$



черт. 85.

и

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(I_x + I_y \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(I_x - I_y \right)^2 + Z_{xy}^2},$$

мы видимъ, что рѣшеніе нашей задачи надо начать съ опредѣленія, I_x , I_y и Z_{xy} .

Выбирая за оси x и y катеты даннаго треугольника, начнемъ рѣшеніе съ выясненія сперва центробѣжнаго момента Z_{xy} . Для этой

цѣли выдѣлимъ изъ площади треугольника на разстояніи y отъ оси x , полосу шириною u и высотой dy ; тогда элементарный центробѣжный моментъ всей этой полосы будетъ равенъ:

$$y \, du \int_0^u x \, dx,$$

гдѣ $y \, dy$ вынесено за знакъ интеграла, т. к. y и dy величины постоянныя для полосы $u \, dy$.

Произведя интегрированіе и подставляя предѣлы, получимъ

$$y \, dy \cdot \frac{u^2}{2};$$

вставляя же вмѣсто u его величину, найденную изъ пропорціи

$$u : a = (b - y) : b,$$

$$\text{найдемъ } u = a \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

Получимъ для центробѣжнаго момента полосы:

$$y \, dy \cdot \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2.$$

Центробѣжный же моментъ всей площади треугольника относительно осей x и y , очевидно, будетъ:

$$Z_{xy} = \int_0^b y \, dy \cdot \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y}{b} \right)^2,$$

или интегрируя, имѣемъ:

$$Z_{xy} = \frac{a^2 b^2}{24}.$$

Вводя площадь треугольника

$$\omega = \frac{ab}{2},$$

получимъ окончательно:

$$Z_{xy} = \omega \cdot \frac{ab}{12}.$$

Далѣе, для I_{x_0} и I_{y_0} , т. е. для моментовъ инерціи относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести треугольника параллельно его сторонамъ, мы имѣли:

$$I_{x_0} = \frac{ab^3}{36}$$

$$I_{y_0} = \frac{ba^3}{36}.$$

Переходя же къ осямъ имъ параллельнымъ и находящимся на разстояніяхъ $\frac{b}{3}$ и $\frac{a}{3}$ отъ осей x_0 и y_0 получимъ:

$$I_x = \frac{ab^3}{36} + \omega \left(\frac{b}{3} \right)^2$$

$$I_y = \frac{ba^3}{36} + \omega \left(\frac{a}{3} \right)^2$$

или

$$I_x = \omega \cdot \frac{b^2}{6}$$

$$I_y = \omega \cdot \frac{a^2}{6}$$

Подставляя теперь найденныя величины для I_x , I_y и Z_{xy} въ формулы, приведенныя въ началѣ этой задачи, получимъ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$I_{12} = \frac{\omega}{12} \left(a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + b^4} \right).$$

Въ частномъ случаѣ, когда $b = 2a$ получимъ:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2}{3},$$

слѣдовательно, $2\alpha = -33^\circ 40'$ и $146^\circ 20'$

$$\alpha = -16^\circ 50' \text{ и } 73^\circ 10',$$

т. е. главныя оси расположатся, какъ указано на чертежѣ.

Для главныхъ же моментовъ инерціи получимъ значенія

$$I_1 = 0,717 a^4 = 0,717 \omega \cdot a^2$$

$$I_2 = 0,116 a^4 = 0,116 \omega \cdot a^2$$

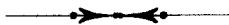
Оканчивая настоящій отдѣлъ, считаю долгомъ указать тѣ источники, которые служили мнѣ для составленія графической статикѣ:

Müller — Breslau H. Die graphische Statik der Bauconstructions.

Ясинскій Ф. Статика сооружений.

Föppl. A. Vorlesungen über technische Mechanik.

Keck. W. Die graphische Statik.



ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.

Предметъ строительной механики и ея раздѣленіе.

Часть I.

Графическая статика.

ГЛАВА 1-ая.

Сложеніе и разложеніе силъ, лежащихъ въ одной плоскости.

	Стран.
1. Общія понятія	5.
2. Сложеніе двухъ силъ, имѣющихъ одну точку приложенія	5.
3. Сложеніе нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ	6.
4. Сложеніе силъ, приложенныхъ въ разныхъ точкахъ	7.
5. Разложеніе силы на двѣ составляющія	7.
6. Общий методъ сложения силъ	8.
7. Сложеніе параллельныхъ силъ	10.
8. Особенный случай сложения силъ	11.
9. Разложеніе данной силы на двѣ параллельныя	11.
10. Общий случай нахожденія двухъ параллельныхъ силъ, уравновѣшивающихъ данныя	12.
11. Разложеніе силы на три направленія, не пересѣкающіяся въ одной точкѣ	12.

ГЛАВА 2-ая.

Моментъ дѣйствующихъ силъ.

12. Понятіе	14.
13. Опредѣленіе статическаго момента нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости	14.
14. Моментъ параллельныхъ силъ	15.
15. Условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на свободное тѣло	16.

ГЛАВА 3-ая.

Опоры плоскихъ системъ и ихъ реакціи.

16. Методы затвердѣнія и отсѣченія	17.
17. Виды опоръ плоскихъ системъ	18.
18. Условіе статической опредѣлимости опорныхъ реакцій простыхъ плоскихъ системъ	20.
19. Условіе статической опредѣлимости опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ	21.

20. Аналитическіе признаки совмѣстимости уравненій равновѣсія 24.
21. Вліяніе измѣненія температуры на опорныя реакціи 27.

ГЛАВА 4-ая.

Способы опредѣленія опорныхъ реакцій плоскихъ системъ.

22. Опредѣленіе опорныхъ реакцій простыхъ плоскихъ системъ, статически опредѣлимыхъ относительно опорныхъ реакцій . 28.
23. Опредѣленіе статически опредѣлимыхъ опорныхъ реакцій сложныхъ плоскихъ системъ 30.

ГЛАВА 5-ая.

Высшіе моменты параллельныхъ силъ.

24. Опредѣленіе высшихъ моментовъ силъ по способу Кульмана 37.
25. Зависимость между моментами инерціи относительно параллельныхъ осей 39.

ГЛАВА 6-ая.

Статическіе моменты площадей.

26. Графическій способъ опредѣленія статическаго момента площадей 40.
27. Аналитическій способъ опредѣленія статическаго момента площадей 41.
28. Статическій моментъ площади треугольника относительно одной изъ его сторонъ 42.
29. Статическій моментъ сектора относительно оси, проходящей черезъ центръ круга 43.

ГЛАВА 7-ая.

Опредѣленіе центра тяжести площадей.

30. Аналитическій способъ опредѣленія центра тяжести 44.
31. Графическій способъ опредѣленія центра тяжести площади 46.
32. Опредѣленіе центра тяжести площади, центры тяжести составныхъ частей которой известны 46.

ГЛАВА 8-ая.

Опредѣленіе моментовъ второго порядка площадей.

33. Общія понятія 47.
34. Зависимость между моментомъ инерціи всей площади и моментами инерціи составляющихъ площадей 48.
35. Зависимость между моментами инерціи площадей относительно двухъ параллельныхъ осей 48.
36. Графическій способъ Кульмана опредѣленія момента инерціи площадей 49.
37. Графическій способъ Моора для опредѣленія момента инерціи площади
37. Зависимость между плечами инерціи площади относительно параллельныхъ осей
38. Моментъ и плечо инерціи параллелограмма

39. Моментъ и плечо инерціи треугольника	55.
40. Моментъ и плечо инерціи площади круга относительно диаметра	56.
41. Опредѣленіе плеча инерціи графически для произвольной площади	56.
42. Зависимость между моментами второго порядка относительно осей проходящихъ черезъ одну точку	58.
43. Графическій способъ нахождения	60.
44. Главные моменты инерціи и главныя оси	61.
45. Опредѣленіе главныхъ моментовъ инерціи аналитическимъ путемъ	64.
46. Опредѣленіе произведения инерціи относительно осей параллельныхъ осямъ, относительно которыхъ произведение инерціи извѣстно	66.
47. Опредѣленіе произведения инерціи графическимъ путемъ	66.
48. Опредѣленіе моментовъ второго порядка относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести площади, безъ опредѣленія самаго центра тяжести	67.
49. Моменты второго порядка при косоугольныхъ осяхъ	68.
50. Эллипсъ инерціи	69.
51. Полярные моменты инерціи	75.
52. Примѣры опредѣленія моментовъ 2-ого порядка	76.
Примѣръ 1-ый.	76.
Примѣръ 2-ой	77.
Примѣръ 3-ий.	78.
Примѣръ 4-ый.	79.
Примѣръ 5-ый.	79.
